Numéro d'ordre

Année 1973

THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Marc DUC-JACQUET

Docteur de 3ème cycle

APPROXIMATION DES FONCTIONNELLES LINEAIRES SUR LES ESPACES HILBERTIENS AUTOREPRODUISANTS

Soutenue le 23 mars 1973 devant la commission d'examen

M. J. KUNTZMANN Président

MM. M. ATTEIA
N. GASTINEL
P.J. LAURENT
B. MALGRANGE

Examinateurs

Numéro d'ordre

Année 1973

THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Marc **DUC-JACQUET**

Docteur de 3ème cycle

APPROXIMATION DES FONCTIONNELLES LINEAIRES SUR LES ESPACES HILBERTIENS AUTOREPRODUISANTS

Soutenue le 23 mars 1973 devant la commission d'examen

M. J. KUNTZMANN Président

MM. M. ATTEIA
N. GASTINEL
P.J. LAURENT
B. MALGRANGE

} Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE

ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures

MM. GASTINEL Noël	Analyse numérique
GERBER Robert	Mathématiques Pures
GIRAUD Pierre	Géologie
KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM. KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
LACAZE Albert	Thermodynamique
LACHARME Jean	Biologie végétale
LATREILLE René	Chirurgie générale
LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
LEDRU Jean	Clinique médicale B
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOUP Jean	Géographie
Mle LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
MALINAS Yves	Clinique obstétricale
MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
MASSEPORT Jean	Géographie
MAZARE Yves	Clinique médicale A
MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
MOURIQUAND Claude	Histologie
MOUSSA André	Chimie nucléaire
NEEL Louis	Physique du Solide
OZENDA Paul	Botanique
PAUTHENET René	Electrotechnique
PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRET René	Servomécanismes
PILLET Emile	Physique industrielle
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
REULOS René	Physique industrielle
RINALDI Renaud	Physique
ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
SANTON Lucien	Mécanique
SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
SENGEL Philippe	Zoologie
SILBERT Robert	Mécanique des fluides
SOUTIF Michel	Physique générale
TANCHE Maurice	Physiologie
TRAYNARD Philippe	Chimie générale
VAILLAND François	Zoologie
VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M. VERAIN André	Physique
Mme VEYRET Germaine	Géographie
MM. VEYRET Paul	Géographie
VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. BULLEMER Bernhard	Physique
RADHAKRISHNA Pidatala	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	AUBERT Guy	Physique
	BEAUDOING André	Pédiatrie
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Appliquées
	BIARES Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
M.	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRIERE Georges	Physique expérimentale
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse

MM. CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
CHIBON Pierre	Biologie animale
COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
COLOMB Maurice	Biochimie médicale
CONTE René	Physique
CROUZET Guy	Radiologie
DURAND Francis	Métallurgie
DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM. FAURE Jacques	Médecine légale
GAVEND Michel	Pharmacologie
GENSAC Pierre	Botanique
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIDON Maurice	Géologie
GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
GROULADE Joseph	Biochimie médicale
HOLLARD Daniel	Hématologie
HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
IDELMAN Simon	Physiologie animale
IVANES Marcel	Electricité
JALBERT Pierre	Histologie
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
KAHANE André	Physique générale
KUHN Gérard	Physique
Mme LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM. LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LANCIA Roland	Physique atomique
LE JUNTER Noël	Electronique
LEROY Philippe	Mathématiques
LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
LUU DUC Cuong	Chimie Organique
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
MARECHAL Jean	Mécanique
MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
MAYNARD Roger	Physique du Solide
MICOUD Max	Maladies infectieuses
MOREAU René	Hydraulique (INP)
NEGRE Robert	Mécanique
PARAMELLE Bernard	Pneumologie
PECCOUD François	Analyse (IUT B)
PEFFEN René	Métallurgie
PELMONT Jean	Physiologie animale
PERRET Jean	Neurologie
PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle PIERY Yvette	Biologie animale
MM. RACHAIL Michel	Médecine interne
RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
RICHARD Lucien	Botanique
Mme RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM. ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
ROUGEMONT (DE) Jacques	Neuro-Chirurgie
STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie

MM. STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
VIALON Pierre	Géologie
VOOG Robert	Médecine interne
VROUSSOS Constantin	Radiologie
ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
CHEEKE John	Thermodynamique
GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MATIRES DE CONFERENCES

Mme BERIEL Hélène	Physiologie
Mme RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 8 MARS 1972.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534927_0043

Cette thèse a été préparée à l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble.

Monsieur KUNTZMANN a bien voulu accepter de présider le Jury. Par l'enseignement qu'il m'a prodigué en second cycle, je lui dois mon orientation vers les mathématiques appliquées. Je lui exprime ma très respectueuse gratitude.

Ma reconnaissance va particulièrement à Monsieur GASTINEL qui a dirigé mon travail. Sans son appui constant, appui moral autant que technique, ce travail n'aurait pu être mené à bien. Par la qualité des contacts humains et professionnels avec ses collaborateurs, les exemples d'enthousiasme, de persévérance, et d'humilité qu'il donne, Monsieur GASTINEL est,et restera pour moi, un maître exemplaire.

Messieurs ATTEIA, LAURENT, MALGRANGE ont bien voulu faire partie du Jury ;je les en remercie très vivement.

Que Monsieur MALGRANGE en particulier sache combien je suis sensible à l'honneur qu'il me fait ainsi.

Je voudrais aussi remercier tous mes camarades du Laboratoire de Calcul qui m'ont aidé, notamment F. CATZ.

Enfin, toute ma reconnaissance va à Mesdemoiselles C. PAYERNE et G. BICAÏS du secrétariat, Messieurs ANGUILLE, LABORIE, DEL GUIST, IGLESIAS, MOUNET du service tirage, pour le soin qu'ils ont apporté dans la réalisation matérielle de cette thèse.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE I FONCTIONS SYMMETRIQUES, DEFINIES POSITIVES OU NULLES ET ESPACES HILBERTIENS A NOYAUX REPRODUISANTS.

Introduction

§ I.1 Notations..... p. I.1

§ I.2 Fonctions symmétriques, définies positives ou nulles sur X ..... p. I.1

§ I.3 Noyau reproduisant de $H \subset \mathbb{R}^X$ ..... p. I.2

§ I.4 Espace hilbertien associé à une fonction symétrique, définie positive ou nulle sur X ..... p. I.3

§ I.5 Propriétés essentielles des noyaux reproduisants..... p. I.8

§ I.6 Exemples d'espaces hilbertiens à noyaux reproduisants p. I.10

I.6.1 Les espaces de dimension finie..... p. I.10

I.6.2 Les espaces $H_{(\alpha,\beta)}$ et espaces du type $W^{1,2}(X)$ p. I.12

I.6.3 Un espace de fonctions analytiques..... p. I.18

CHAPITRE II ETUDE DE L'ESPACE HILBERTIEN H ASSOCIE A UN NOYAU REPRODUISANT g DONNE.

Introduction

§ II.1 Notion de support d'un noyau reproduisant..... p. II. 2

§ II.2 Importance de la notion de support. Espaces H^S ..... p. II. 5

§ II.3 Interpolation d'une fonction de $\mathbb{R}^X$ par des fonctions de H, espace hilbertien asscié au noyau g ..... p. II. 9

§ II.4 Caractérisation de l'espace hilbertien H, associé au noyau reproduisant g ..... p. II. 14

§ II.5 Espaces hilbertiens de fonctions continues, à noyaux reproduisants..... p. II. 18

§ II.6 Immersion d'un espace hilbertien de fonctions dans un espace vectoriel topologique. Noyau de SCHWARTZ..... p. II. 31

CHAPITRE III LES NOYAUX FACTORISABLES. ESPACES HILBERTIENS ASSOCIES.

§ III.1 Fonction factorisable sur $X \subset \mathbb{R}$. Noyau factorisable p. III. 1
§ III.2 CNS pour qu'une fonction factorisable sur X soit un noyau reproduisant..... p. III. 2
Remarques diverses..... p. III. 6
§ III.3 Exemples de noyaux factorisables..... p. III.10
§ III.4 Etude des supports d'un noyau factorisable..... p. III.12
§ III.5 Condition pour que H soit inclus dans $C^0(X)$ lorsque g est un noyau factorisable..... p. III.17
§ III.6 et III.7
Caractérisation de l'espace H associé au noyau g ... p. III.18
§ III.8 Détermination de l'espace hilbertien H, associé à un noyau factorisable sur X, de composantes continues sur X ..... p. III.24
Exemples..... p. III.29

CHAPITRE IV APPROXIMATION DE FONCTIONNELLES LINEAIRES.FORMULES OPTIMALES.

§ IV.1 Introduction..... p. IV. 1
§ IV.2 Autres formulations du problème de meilleure approximation..... p. IV. 2
§ IV.3 Explicitation de la fonction $x \in X^N \to \Phi^2(h;x) \in \mathbb{R}^+$ ..... p. IV. 3
§ IV.4 Une condition suffisante d'existence d'une approximation optimale..... p. IV. 5
§ IV.5 Applications..... p. IV. 7
§ IV.6 Continuité de l'application $x \in X^N \to \Phi^2(h;x) \in \mathbb{R}^+$ ..... p. IV.26
Applications..... p. IV.33
§ IV.7 Une caractérisation des approximations optimales.... p. IV.42
§ IV.8 Conditions nécessaires d'existence d'une approximation optimale..... p. IV.46
§ IV.9 Etude détaillée d'une formule optimale pour l'approximation d'une intégrale avec singularité à l'origine p. IV.55
Résultats numériques..... p. IV.67

CHAPITRE V GENERALISATION D'UN THEOREME D'ARONSZAJN. APPLICATIONS.

Introduction

§ V.1 Retour sur le théorème d'ARONSZAJN..... p. V. 1

§ V.2 Généralisation du théorème d'ARONSZAJN..... p. V. 2

§ V.3 Espaces hilbertiens couplés..... p. V.10

§ V.4 Exemple d'application..... p. V.18

CHAPITRE VI APPLICATIONS AUX ESPACES HILBERTIENS DE SUITES NUMERIQUES.

Introduction

§ VI.2 Notations. Définitions. Enoncé du théorème I.4.2 dans le cas d'espaces de suites..... p. VI. 1

§ VI.3 Caractérisation de l'espace H à partir de son noyau G p. VI. 3

§ VI.4 Espaces hilbertiens de suites, à noyaux reproduisants factorisables..... p. VI. 4

Exemples..... p. VI. 6

BIBLIOGRAPHIE.

INTRODUCTION

Ce travail est une contribution à l'approximation des fonctionnelles linéaires.

Si E est un espace vectoriel normé de fonctions définies sur une partie X de la droite numérique, on s'intéresse à l'approximation d'une fonctionnelle ℓ, linéaire, continue sur E, par des fonctionnelles d'évaluation.

$$\ell(f) \simeq \sum_{i=1}^{N} A_i f(x_i) = \left(\sum_{i=1}^{N} A_i \delta_{x_i} \right)(f)$$

Si on suppose que δ_x est continue sur E pour tout x dans X, la fonctionnelle erreur $R = \ell - \sum_{i=1}^{N} A_i \delta_{x_i}$, est alors également continue sur E et on a la majoration d'erreur

$$|R(f)| \leq \|R\|_{E'} \, \|f\|_E \qquad \forall f \in E$$

Le choix des poids $A_i \in \mathbb{R}$ et des noeuds $x_i \in X$ $i=1,2,\ldots,N$ qui minimisent $\|R\|_{E'}$, est un problème difficile, et encore largement ouvert. C'est à cette question d'élaboration de formules optimales que nous avons voué nos efforts. Initialement nous nous sommes intéressés à un problème précis : l'étude de la fonctionnelle intégrale :

$f \to I(f) = \int_0^1 f(t)dt$, dans l'espace de Sobolev $H^1_{(0,1)}$. A l'occasion de cette étude, qui s'est révélée fructueuse, nous avons pu mettre en évidence l'importance du choix de l'espace de travail : $H^1_{(0,1)}$ est un espace de Hilbert qui admet un noyau reproduisant.

On dit qu'un espace hilbertien H de fonctions réelles définies sur $X \subset \mathbb{R}$, admet un noyau reproduisant — ou encore que H est un espace autoreproduisant — s'il existe une fonction g définie sur $X \times X$ avec

* $g(x,.) \in H \qquad \forall x \in X$

($g(x,.)$ désigne l'application $t \in X \to g(x,t) \in \mathbb{R}$)

* $(g(x,.)|\varphi) = \varphi(x) \quad \begin{matrix} \forall x \in X \\ \forall \varphi \in H \end{matrix}$ où $(|)$ dénote le produit scalaire dans H.

(propriété de reproduction).

Cette notion, introduite par N. ARONSZAJN [1], puis généralisée par L. SCHWARTZ, s'est avérée être d'une grande utilité. Cependant la chose la plus importante dans l'exemple choisi, se trouvait être la forme du noyau reproduisant.

A partir de là, il était tout à fait indiqué, de s'intéresser aux espaces du "même type". Nous avons ainsi été conduits à caractériser une classe importante d'espaces hilbertiens, dans lesquels nous pouvons résoudre le problème de l'existence de formules optimales.

Nous avons divisé notre travail comme suit :

- Le chapitre I est consacré à l'introduction des outils essentiels : les espaces hilbertiens à noyaux reproduisants.

Nous donnons en particulier une démonstration détaillée du théorème fondamental de la théorie de N. ARONSZAJN car ce résultat est à la base de tout notre propre travail. Nous donnons ensuite des exemples importants de ces espaces.

- L'objet du chapitre II est l'étude de l'espace hilbertien H associé à un noyau donné g. Nous introduisons à ce propos, une notion fort utile: celle de support d'un noyau. Un support du noyau g définie sur $X \times X$ est une partie S de X telle que $\{g(x,.)|x \in S\}$ est une base de $L((g(x,.)|x \in X))$ (espace vectoriel des combinaisons linéaires finies d'éléments $g(.,x)$, $x \in X$).

Nous nous intéressons également à la caractérisation de l'espace H à partir de son noyau. Nous entendons par caractérisation le fait de pouvoir décider, à l'aide d'un critère simple, si une fonction appartient ou n'appartient pas à H. Nous rejoignons là, la théorie de L. SCHWARTZ

sur les sous espaces hilbertiens d'un espace vectoriel topologique. Certains aspects de cette théorie sont repris ici, dans un contexte beaucoup moins abstrait, et nous avons donc adapté les démonstrations.

Notons aussi que dans le cadre plus restreint où nous nous sommes placés, on peut expliciter un peu plus certains résultats de L. SCHWARTZ (cf.§II.5 en particulier et généralisation par F. CATZ [12]).

— Dans le chapitre III, nous introduisons la classe particulière des noyaux factorisables. Un noyau g est dit factorisable s'il s'écrit

$$g(x,y) = a(\min(x,y)) \times b(\max(x,y)) \qquad (x,y) \in X \times X$$

où a,b sont deux fonctions définies sur X. Cette notion correspond à la notion de covariance triangulaire chez les probabilistes (cf. NEVEU [32])

Nous appliquons les résultats des deux chapitres précédents à ces noyaux, pour caractériser les espaces hilbertiens associés. Nous obtenon ainsi un procédé fort intéressant pour générer des espaces hilbertiens de fonctions. Nous terminons ce chapitre par de nombreux exemples.

— Le chapitre IV est consacré à l'étude de notre problème initial : celui de l'existence de formules optimales d'approximation des fonctionnelles linéaires par des fonctionnelles d'évaluation.

On peut dire sans exagérer que ce problème demeure encore largemen ouvert. En effet, il a été essentiellement étudié, dans le cas d'espaces hilbertiens de fonctions analytiques. L'outil essentiel était alors le noyau de BERGMANN [11]. Citons en particulier les travaux de R.E. BARNHILL [6] à [9] , P.J. DAVIS et P. RABINOWITZ [17] , U. ECKARD [22] .

Nous avons, quant à nous, étudié le problème dans les espaces introduits au chapitre III . Nous avons ainsi obtenu un théorème d'existe particulièrement intéressant (cf. § IV.6). Ici encore nous illustrons nos propos par de nombreux exemples. Nous donnons ainsi <u>explicitement</u> quelques formules d'intégration optimales dans les espaces de Sobolev

- choix des <u>noeuds</u> x_i <u>et</u> des <u>poids</u> A_i , $i=1,2,\ldots,N$, pour lesquels la norme de la fonctionnelle erreur

$$R(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{N} A_i f(x_i)$$

est minimum.

Quelques résultats de ce chapitre, concernant "l'ordre" d'une formule optimale (§ IV - 7) sont valables dans un contexte plus général.

— Les deux derniers chapitres sont de nature un peu différente.

Dans le chapitre V, nous donnons une généralisation du théorème fondamental d'ARONSZAJN. Nous introduisons la notion de couplage d'espaces hilbertiens à noyaux reproduisants. Ceci semble être un moyen, pour générer des espaces dans lesquels on puisse résoudre des problèmes d'existence d'approximations optimales d'une fonctionnelle , par des fonctionnelles dépendant d'un paramètre (plus nécessairement des fonctionnelles d'évaluation). Toutefois ce point de vue demeure encore très embryonnaire, et nous paraît devoir mériter un plus grand développement.

Le chapitre VI est assez bref. Certains résultats relatifs aux espaces de fonctions, demeurent encore valides dans les espaces de suites numériques. L'objet de ce chapitre est d'énoncer ces résultats en termes d'espaces de suites. Nous introduisons en particulier les espaces hilbertiens de suites à noyaux factorisables, (espaces hilbertiens de suites du type espaces de Sobolev pondérés). C'est dans cette classe d'espaces que J. BARANGER [3] a pu étudier des formules optimales de sommation de séries.

Quant à la forme, ce travail a été rédigé de manière à faire un tout cohérent, sans renvoi inutile à des ouvrages traitant abstraitement de notre problème. Les démonstrationssont donc toujours assez détaillées, et nous avons tout au long de ce travail multiplié les exemples.

Nous espérons ainsi que cette thèse pourra être lue aisément par quiconque, et que les quelques idées que nous avons essayé de mettre en évidence, pourront être reprises et développées. S'il pouvait en être ainsi, nous aurions atteint notre but.

Nous voudrions aussi signaler que le point de départ de ce travail a été la lecture d'un article de H.S. WILF [42] .
Jamais un si court article ne nous aura tant fait réfléchir !

Pour terminer, mentionnons que F.M. LARKIN a un peu abordé, en terme très voisins des nôtres d'ailleurs, le problème de l'approximation des fonctionnelles linéaires dans les espaces autoreproduisants (cf. [30]).

CHAPITRE I

FONCTIONS SYMETRIQUES, DEFINIES POSITIVES OU NULLES

ET ESPACES HILBERTIENS A NOYAUX REPRODUISANTS

Introduction :

C'est à N. ARONSZAJN que l'on doit la théorie des noyaux reproduisants : "Theory of reproducing kernels" cf [1]. En nous limitant à la considération de fonctions réelles de la variable réelle, nous nous proposons de rappeler les résultats essentiels de cette théorie. Nous donnons ici la démonstration détaillée du théorème fondamental, qui est à la base de tout notre travail.

I.1. Notations :

Soit X une partie quelconque de la droite réelle : $X \subset \mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}^X$ l'espace des fonctions définies sur X et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans toute la suite H désignera un espace hilbertien réel : $H \subset \mathbb{R}^X$.

Pour $f,h \in H$ on notera :

. $(f|h)$ le produit scalaire de f et h ,

. $\|f\| = (f|f)^{1/2}$ la norme de f .

I.2. Fonctions symétriques, définies positives ou nulles sur X :

Définition I.2.

Une fonction $g : (x,y) \in X * X \to g(x,y) \in \mathbb{R}$, est dite symétrique, définie positive ou nulle (sur X) si

a/ $g(x,y) = g(y,x)$ $\quad \forall (x,y) \in X * X$

b/ $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_i A_j g(x_i,x_j) \geq 0$ $\quad \left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \ , \ n \geq 1 \\ \forall (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in X^n \\ \forall (A_1,A_2,\ldots,A_n) \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$

De manière équivalente, on peut dire que g est symétrique, définie positive ou nulle sur X, si quel que soit l'entier n, $n \geq 1$, et quel que soit le n-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de X^n, la matrice carrée d'ordre n : $G = (g(x_i, x_j))$ est symétrique, définie positive ou nulle.

I.3. Noyau reproduisant de $H \subset \mathbb{R}^X$:

Définition I.3.

Une fonction $k : (x,y) \in X * X \to k(x,y) \in \mathbb{R}$ est appelée noyau reproduisant de l'espace hilbertien H, $H \subset \mathbb{R}^X$, si

a/ $k(.,y) \in H \qquad \forall y \in X$

b/ $(k(.,y) | \varphi(.)) = \varphi(y) \qquad \forall y \in X, \forall \varphi \in H$

$k(.,y)$ désignant l'application $x \in X \to k(x,y) \in \mathbb{R}$.

Des définitions I.2 et I.3 il découle la

Propriété I.3.

Un noyau reproduisant k, est une fonction symétrique, définie positive ou nulle.

Démonstration :

On a en effet d'après la définition I.3 :

$$\left.\begin{array}{l} (k(.,y) | k(.,x)) = k(y,x) \\ (k(.,x) | k(.,y)) = k(x,y) \end{array}\right| \quad \forall (x,y) \in X * X$$

H étant un espace hilbertien réel, la symétrie du produit scalaire entraîne : $k(x,y) = k(y,x)$ et donc k est symétrique sur X.

D'autre part soient $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in X^n$ et $(A_1,A_2,\ldots,A_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

$\varphi = \sum_{i=1}^{n} A_i k(.,x_i) \in H$, et on a d'après la propriété b/ de la définition I.3 (appelée "propriété de reproduction") :

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_i A_j k(x_i,x_j) \geq 0 .$$

k est donc une fonction symétrique, définie positive ou nulle sur X .

———X———

I.4. Espace hilbertien associé à une fonction symétrique, définie positive ou nulle sur X . (N. ARONSZAJN).

Nous venons de voir que le noyau reproduisant k d'un espace hilbertien H , $H \subset \mathbb{R}^X$, est une fonction symétrique, définie positive ou nulle sur X .
Nous allons étudier le point de vue réciproque en démontrant le

Théorème I.4.1.

Si g est une fonction symétrique, définie positive ou nulle sur X , on peut lui associer un espace hilbertien réel H de fonctions, $H \subset \mathbb{R}^X$, cet espace admettant g comme noyau reproduisant.

Démonstration :

Première étape.

Considérons l'espace vectoriel $H_o \subset \mathbb{R}^X$, des combinaisons linéaires finies du type $\sum_{i=1}^{n} A_i g(.,x_i)$ $\Big|$ $x_i \in X$, $A_i \in \mathbb{R}$ $\quad i=1,2,\ldots,n$; $n \geq 1$.

On associe à $f_1 = \sum_{i=1}^{n} A_i g(.,x_i)$ et

$f_2 = \sum_{j=1}^{m} B_j g(.,y_j)$, $f_1, f_2 \in H_o$, le nombre réel

$$\left[f_1,f_2\right] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_i B_j g(x_i,y_j) \qquad (4.1)$$

1°) On définit ainsi une application de $H_o * H_o$ dans $\mathbb{R}$. En effet

$$\left[f_1,f_2\right] = \sum_{j=1}^{m} B_j \left(\sum_{i=1}^{n} A_i g(x_i,y_j) \right) = \sum_{j=1}^{m} B_j f_1(y_j) \qquad (4.2)$$

expression qui ne dépend donc pas de la représentation de la fonction f_1 dans H_o , mais seulement de ses valeurs. De même $\left[f_1,f_2\right]$ ne dépend pas de la représentation de f_2 .

2°) On vérifie immédiatement que quels que soient f_1,f_2,f_3 dans H_o on a :

- $\left[f_1,f_2\right] = \left[f_2,f_1\right]$ (symétrie de g) (4.3)
- $\left[f_1+f_2,f_3\right] = \left[f_1,f_3\right] + \left[f_2,f_3\right]$ (4.4)
- $\left[f_1,f_1\right] \geq 0$ (g définie positive ou nulle) (4.5)

- Si $f_1 = 0$, en reprenant l'interprétation de $\left[f_1,f_2\right]$, expression (4.2), $\left[f_1,f_2\right] = 0 \quad \forall\, f_2 \in H_o$. En particulier $\left[f_1,f_1\right] = 0$.

- Réciproquement soit f_1 telle que $\left[f_1,f_1\right] = 0$. D'après (4.3), (4.4), (4.5) la forme bilinéaire

$$(f_1,f_2) \to \left[f_1,f_2\right]$$

est symétrique, non négative, sur $H_o \times H_o$. D'après l'inégalité de Schwartz on a alors :

$$\left|\left[f_1,f_2\right]\right| \leq \left[f_1,f_1\right]^{1/2}\left[f_2,f_2\right]^{1/2} = 0 \ , \ \forall f_2 \in H_o \ .$$

En particulier si $f_2 = g(.,x)$ on a :

$\left[f_1,g(.,x)\right] = f_1(x) = 0 \quad \forall\, x \in X$, et donc $f_1 = 0$.

La forme bilinéaire (4.1) munit donc H_o , d'une structure d'espace préhilbertien, que nous noterons encore H_o .

Deuxième étape.

Complétion de H_o . On considère le complété $\hat{H}_o$ de H_o pour la norme préhilbertienne, notée $\| \ \|_{H_o}$. Rappelons que si $\mathcal{C}_{H_o}$ désigne l'ensemble des suites de CAUCHY de H_o , et si on considère sur $\mathcal{C}_{H_o}$ la relation d'équivalence :

$$R : \{f_n\} \sim \{g_n\} \quad \text{ssi} \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - g_n\|_{H_o} = 0 \tag{4.6}$$

on a $\hat{H}_o = \mathcal{C}_{H_o} / R$ (ensemble des classes d'équivalence)

et le produit scalaire dans $\hat{H}_o$ s'écrit si $\dot{f}, \dot{h} \in \hat{H}_o$

$$(\dot{f}|\dot{h})_{\hat{H}_o} = \lim_{n\to\infty} [f_n, h_n] \qquad \begin{array}{l} \text{si } \{f_n\} \text{ appartient à la classe } \dot{f} \\ \text{et } \{h_n\} \text{ à la classe } \dot{h} \ . \end{array}$$

Troisième étape.

L'espace $\hat{H}_o$ n'est pas très maniable, comme tout complété, puisque ses éléments sont des classes d'équivalence. Il est cependant aisé de mettre $\hat{H}_o$ en correspondance isométrique avec un espace de fonctions. Nous allons le montrer, justifiant par là-même, la définition de $\hat{H}_o$, donnée ci-dessus.

Démontrons au préalable le

Lemme :

Si $\{f_n\}$ et $\{h_n\}$ appartiennent à $\mathcal{C}_{H_o}$ alors :

* les suites numériques $\{f_n(x)\}$ et $\{h_n(x)\}$ sont convergentes, $\forall\, x \in X$

* $\{f_n\} \sim \{h_n\}$ ssi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x)$, $\forall\, x \in X$.

Démonstration :

1/ Pour $f \in H_o$ on a $f(x) = [f, g(.,x)]$ et donc :

$$f_n(x) - f_m(x) = [f_n - f_m, g(.,x)]$$

et $$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \| f_n - f_m \|_{H_o} \, g(x,x)^{1/2} \qquad (4.7)$$

Par hypothèse $\{f_n\} \in C_{H_o}$, donc $\{f_n(x)\}$ est de CAUCHY dans $\mathbb{R}$ et donc converge. On raisonnerait de même pour $\{h_n(x)\}$.

2/ Si $\{f_n\} \sim \{h_n\}$ alors $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x)$, $\forall x \in X$

En effet cela découle directement de (4.7). (Remplacer f_m par h_n).

3/ Réciproquement considérons $\{f_n\}$, $\{h_n\} \in C_{H_o}$ et vérifiant

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x)$, $\forall x \in X$. On a alors $\{f_n\} \sim \{h_n\}$.

Pour le voir il suffit de montrer que si $\{f_n\} \in C_{H_o}$ vérifie

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in X$, alors $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{H_o} = 0$.

Ecrivons $$\|f_n\|^2_{H_o} = [f_n, f_n] = [f_n, f_p] + [f_n - f_p, f_n] \qquad (4.8)$$

La suite $\{f_n\}$ appartient à C_{H_o} , et est donc bornée.

$$\|f_n\|_{H_o} \leq A \qquad \forall n \geq 1 \qquad (4.9)$$

A $\varepsilon > 0$ fixé, on peut associer $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq N_1 \Rightarrow \|f_n - f_{N_1}\| \leq \frac{\varepsilon}{2A} \qquad (4.10)$$

Prenons $p = N_1$ dans (4.8).

Il résulte de (4.8), (4.9), (4.10) l'inégalité :

$$\|f_n\|^2_{H_o} \leq |[f_n, f_{N_1}]| + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq N_1 \qquad (4.11)$$

Or f_{N_1} est de la forme $f_{N_1} = \sum_{i=1}^{k} a_i g(.,x_i)$

et $$\left[f_n, f_{N_1}\right] = \sum_{i=1}^{k} a_i f_n(x_i) \qquad (4.12)$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in X$, il existe un entier N_2 tel que :

$$n \geq N_2 \Rightarrow \left|\left[f_n, f_{N_1}\right]\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.13)$$

et pour $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ on aura donc $\|f_n\|^2_{H_o} \leq \varepsilon$.

Donc $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|^2_{H_o} = 0$, ce qui achève la démonstration du lemme.

———X———

Ainsi $\hat{H}_o$ peut être mis en correspondance isométrique avec l'espace H , des fonctions définies sur X , à valeurs dans $\mathbb{R}$, et telles qu'il existe une suite $\{f_n\}$, $\{f_n\} \in C_{H_o}$, de limite ponctuelle f
La norme et le produit scalaire dans H sont alors donnés par :

$$\|f\|_H = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{H_o}$$

et $$(f|h)_H = \lim_{n\to\infty} \left[f_n, h_n\right] .$$

———X———

Quatrième étape.

g est le noyau reproduisant de H. En effet

* $g(.,x) \in H$ ($g(.,x)$ est limite ponctuelle de la suite stationnaire $\{g(.,x)\}$ de H_o)

* $(f|g(.,x))_H = \lim_{n\to\infty} \left[f_n, g(.,x)\right] = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in X$, $\forall f \in H$

Ce qui achève la démonstration du théorème I.4.1.

———X———

En résumé on a le

Théorème I.4.2.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $g : (x,y) \in X \times X \to g(x,y) \in \mathbb{R}$, soit le noyau reproduisant d'un espace hilbertien H, $H \subset \mathbb{R}^X$, est que g soit symétrique, définie positive ou nulle sur X.

———X———

I.5. Propriétés essentielles des noyaux reproduisants (pour toutes ces propriétés on consultera N. ARONSZAJN [1]).

I.5.1. Existence :

On a :

Théorème I.5.1.

$H \subset \mathbb{R}^X$ admet un noyau reproduisant g ssi quel que soit $y \in X$, la fonctionnelle linéaire

$$\delta y : f \in H \to \delta y(f) = f(y)$$

est continue sur H.

D'après la propriété de reproduction

$$(g(.,y)|\varphi) = \varphi(y) \qquad \forall\, y \in X \quad \forall\, \varphi \in H$$

$g(.,y)$ est donc le représentant dans H de la fonctionnelle δy.

I.5.2. Unicité :

Théorème I.5.2.

Si H admet un noyau reproduisant, celui ci est unique.

I.5.3. Inégalités :

$$\forall\, x \in X \qquad g(x,x) \geq 0$$

et $$|g(x,y)| \leq g(x,x)^{1/2} g(y,y)^{1/2} \quad .$$

I.5.4. Convergence uniforme de f_n vers f sur toute partie de X où $g(x,x)$ est borné.

D'après (4.7) on a :

$$|f_n(x)-f_m(x)| \leq \|f_n-f_m\|_{H_o}\, g(x,x)^{1/2}$$

et donc f_n converge uniformément vers f sur toute partie de X où $g(x,x)$ est borné.

I.5.5.

Si H_1 et H_2 ont pour noyaux reproduisants respectifs g_1 et g_2, alors $g = g_1 + g_2$, est le noyau de l'espace $H = H_1 + H_2$ (somme ensembliste) avec :

$$\|f\|_H^2 = \inf_{\substack{f_1 \in H_1 \\ f_2 \in H_2 \\ f = f_1+f_2}} \{\|f_1\|_{H_1}^2 + \|f_2\|_{H_2}^2\} \quad .$$

I.5.6.

Soit H un sous espace hilbertien (pour la topologie induite) d'un espace hilbertien quelconque H_1 .

Si H admet un noyau reproduisant g , alors pour $f \in H_1$ la fonction h définie par :

$$h(y) = (f(.)|g(.,y))$$

est la projection orthogonale de f sur H .

I.5.7.

Si $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de H , alors

$$g(x,y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} e_i(x)e_i(y) \ .$$

I.6. Exemples d'espaces hilbertiens à noyaux reproduisants.

Exemple I.6.1.

Les espaces de dimension finie.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^X$, de dimension n , et $f_1, f_2, \ldots, f_n$ une base de V . La structure hilbertienne la plus générale sur V , est déterminée par la donnée d'une matrice, symétrique, définie positive, d'ordre n :

$$\alpha = (\alpha_{ij}) \qquad i,j=1,2,\ldots,n \tag{6.1}$$

avec $$(f_i|f_j) = \alpha_{ij} \qquad i,j=1,2,\ldots,n \tag{6.2}$$

et donc $$(f|h) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} a_i b_j \tag{6.3}$$

si $$f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \ , \ h = \sum_{1}^{n} b_i f_i \ ; \ f,h \in V \ .$$

Posons $\beta = \alpha^{-1}$

Alors on peut vérifier que le noyau de l'espace hilbertien H défini par (6.1), (6.3) s'écrit :

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} f_i(x) f_j(y) \qquad (6.5)$$

En particulier si $\alpha = I$ (matrice identité $n \times n$) il vient :

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) f_i(y) \qquad (6.6)$$

ce qui n'est qu'un cas particulier de la propriété I.5.7.

Considérons en particulier l'espace de Hilbert :

$$L^2_p(X) = \{\varphi \mid \int_X p(t)\varphi^2(t) < +\infty \ , \ \|\varphi\|^2 = \int_X p(t)\varphi^2(t)dt\}$$

où p vérifie $p(t) \geq 0$, $\forall t \in X$. Soit H le sous-espace hilbertien de $L^2_p(X)$, constitué des fonctions polynomiales dont le degré n'excède pas n . Si $P_o, P_1, \ldots, P_n$ sont les $(n+1)$ premiers polynômes orthonormés sur X , par rapport au poids p , on a alors comme expression du noyau g de H :

$$g(x,y) = \sum_{i=o}^{n} P_i(x) P_i(y) \qquad (6.7)$$

Si $f \in L^2_p(X)$, sa projection orthogonale P_f sur H est donnée (propriété I.5.6) par la formule :

$$P_f(y) = (f \mid g(.,y)) = \int_X p(t) g(t,y) f(t) dt \qquad (6.8)$$

La formule (6.8) est l'expression sous-forme d'intégrale à noyau du développement de FOURIER, jusqu'à l'ordre n , de la fonction f . (Pour des applications voir par exemple [39]) .

Exemple I.6.2.

Les espaces $H_{(\alpha,\beta)}$ $(0 \leq \alpha < \beta)$ et les espaces du type $W^{1,2}(X)$.

Remarques préliminaires.

Notons $X =]\alpha,\beta[$.

Si $\varphi \in C^0(X)$ et $\varphi' \in L^2(X)$ (φ' : dérivée distribution de φ)

on peut écrire pour $x_0 \in X$:

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \varphi'(t)dt$$

et

$$\varphi(y)-\varphi(x) = \int_{x}^{y} \varphi'(t)dt$$

d'où en appliquant l'inégalité de Schwartz :

$$|\varphi(y)-\varphi(x)|^2 \leq |y-x| \; \left| \int_{x}^{y} \varphi'^2(t)dt \right| \leq |y-x|.M$$

Ainsi φ est uniformément continue sur X , et on peut prolonger cette fonction en une fonction continue sur $\overline{X}$ (cf [18]).

On a également :

$$0 \leq \frac{(\varphi(x)-\varphi(y))^2}{|x-y|} \leq \left| \int_{x}^{y} \varphi'^2(t)dt \right| \quad , \text{ et puisque } \varphi' \in L^2_X$$

$$\lim_{\substack{|x-y| \to 0 \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{x-y} = 0$$

En particulier si $x_0 \in \overline{X}$ avec $\varphi(x_0) = 0$, $\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi^2(x)}{x-x_0} = 0$.

———— X ————

Les espaces $H_{(\alpha,\beta)}$ $\quad 0 \leq \alpha < \beta$

On pose par définition :

$$H_{(\alpha,\beta)} = \{\varphi \in C^{\infty}_{]\alpha,\beta[} \mid \varphi' \in L^2_{(\alpha,\beta)}, (\varphi|\Psi)_{H(\alpha,\beta)} = \int_{\beta}^{\alpha} \varphi'(x)\Psi'(x)dx + \frac{\varphi(\alpha)\Psi(\alpha)}{\alpha} \}$$

si $\alpha \neq 0$

$$= \{\varphi \in C^{\infty}_{]0,\beta[} \mid \varphi(0)=0 \ , \ \varphi' \in L^2(0,\beta) \ ,$$

$$(\varphi|\Psi)_{H(0,\beta)} = \int_{0}^{\beta} \varphi'(x)\Psi'(x)dx\} \qquad \text{si } \alpha = 0$$

Vérifions que $H_{(\alpha,\beta)}$ est un espace de Hilbert.

D'après les remarques préliminaires, on a $H_{(\alpha,\beta)} \subset C^0(\overline{X})$ et il est légitime de parler de $\varphi(\alpha)$.

Par ailleurs il est clair que la forme bilinéaire, symétrique définie sur $H_{(\alpha,\beta)} \times H_{(\alpha,\beta)}$:

$$\varphi, \Psi \to (\varphi|\Psi)_{H_{(\alpha,\beta)}}$$

est positive et non dégénérée $(\alpha \geq 0)$. $H_{(\alpha,\beta)}$ est donc un espace préhilbertien. La seule question importante est relative à la complétion de $H_{(\alpha,\beta)}$.

Soit $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de CAUCHY de $H_{(\alpha,\beta)}$.

On considère la fonction $g(x,\lambda) = \min(x,\lambda) \qquad (x,\lambda) \in \overline{X} \times \overline{X}$.

On vérifie directement que

$$\star \quad g(.,\lambda) \in H_{(\alpha,\beta)} \tag{1}$$

$$\star \quad (\varphi_n|g(.,\lambda)) = \int_{\alpha}^{\lambda} \varphi_n'(x)dx + \varphi_n(\alpha) = \varphi_n(\lambda) \quad \forall \lambda \in \overline{X} \tag{2}$$

$$\star \quad ||g(.,\lambda)||^2 = \lambda \tag{3}$$

d'où $[\varphi_n(x) - \varphi_m(x)]^2 = (\varphi_n - \varphi_m | g(.,x))^2 \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|^2 \times g(x,x)$

$$\text{soit } [\varphi_n(x) - \varphi_m(x)]^2 \leq \lambda \|\varphi_n - \varphi_m\|^2, \ \forall x \leq \lambda \quad (4)$$

Par hypothèse $\{\varphi_n\}$ est de CAUCHY dans $H_{(\alpha,\beta)}$, et $\varphi_n \in C^0(X)$, $\forall n$. D'après (4), φ_n converge donc uniformément vers une fonction φ sur tout intervalle $[\alpha,\lambda]$, $\forall \lambda \in \overline{X}$. On définit ainsi une fonction φ continue sur X. Etudions la dérivée distribution φ' de φ. Par définition de $H_{(\alpha,\beta)}$:

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|^2_{H_{(\alpha,\beta)}} = \|\varphi_n' - \varphi_m'\|^2_{L^2_{(\alpha,\beta)}} + \frac{(\varphi_n(\alpha) - \varphi_m(\alpha))^2}{\alpha} \quad (5)$$

si $\alpha \neq 0$

$$= \|\varphi_n' - \varphi_m'\|^2_{L^2_{(\alpha,\beta)}} \quad \text{si } \alpha = 0$$

D'après (4), $\{\varphi_n(\alpha)\}$ est convergente, et donc $\{\varphi_n'\}$ est de CAUCHY dans $L^2_{(\alpha,\beta)}$. Ainsi :

$$\exists h \in L^2_{(\alpha,\beta)} : \varphi_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} h \quad \text{dans } L^2_{(\alpha,\beta)}.$$

Montrons que φ' et h définissent une même distribution, autrement dit $\varphi' \in L^2_{(\alpha,\beta)}$.

Pour $k \in D(X)$ — espace des fonctions indéfiniment différentielles sur X et à support compact K dans X — on a si $< , >$ désigne la dualité entre $D(X)$ et $D'(X)$,

$$< \varphi', k > = - < \varphi, k' > = -\int_\alpha^\beta \varphi k' dx = - \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \varphi_n k' dx \quad \text{car } k \text{ est à support}$$

compact, et φ_n converge uniformément vers φ sur ce compact.

Mais $\int_\alpha^\beta \varphi_n k' dx = -\int_\alpha^\beta \varphi_n' k dx$ et

$< \varphi', k > = \lim_{n\to\infty} < \varphi_n', k > = < h, k >$ puisque φ_n' converge vers h dans $L^2_{(\alpha,\beta)}$

On a donc $\varphi' = h \in L^2_{(\alpha,\beta)}$, et finalement $\varphi \in H_{(\alpha,\beta)}$.

$H_{(\alpha,\beta)}$ est donc complet , ce qui achève la démonstration.

———X———

Noyau reproduisant de $H_{(\alpha,\beta)}$.

D'après ce qui précède la fonction $g(x,\lambda) = \min(x,\lambda)$ $(x,\lambda) \in \overline{X} * \overline{X}$ est le noyau reproduisant de $H_{(\alpha,\beta)} \subset C^0(\overline{X})$.

Nous avons introduit à priori cette fonction g , avec certaines motivations toutefois.

En supposant <u>à priori</u> que $H_{(\alpha,\beta)}$ est un espace hilbertien de noyau reproduisant g , on a — dans le cas $\alpha = 0$, $\beta < \infty$ par exemple —

$$\left| \begin{array}{l} g(.,\lambda) \in H_{(\alpha,\beta)} \qquad \forall \lambda \in \overline{X} \\ \int_0^\beta g'_x(x,\lambda)\varphi'(x)dx = \varphi(\lambda) \qquad \forall \lambda \in \overline{X} \ , \ \forall \varphi \in H_{(\alpha,\beta)} \end{array} \right.$$

En particulier pour tout φ de $D(X)$, la dernière équation montre que l'on a alors nécessairement au sens des distributions:

$$- g''(.,\lambda) = \delta_\lambda .$$

La première condition montre également que $g(0,\lambda) = 0$.

Enfin en écrivant alors $\int_0^\beta g'_x(x,\lambda)\varphi'(x)dx = \varphi(\lambda) \qquad \forall \varphi \in H_{(0,\beta)}$

on obtient la condition nécessaire supplémentaire $g'_x(\beta,\lambda) = 0$.

Finalement si $H_{(0,\beta)}$ admet un noyau reproduisant, ce ne peut être que la solution du problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} - g''(.,\lambda) = \delta_\lambda \\ \\ g(0,\lambda) = g'_x(\beta,\lambda) = 0 \end{array} \right.$$

c'est-à-dire précisément la fonction introduite : $g(x,\lambda) = \min(x,\lambda)$.

———X———

Remarque :

Dans le cas $\beta = +\infty$, il est aisé (cf. *remarques préliminaires*) de montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi^2(x)}{x} = 0 \quad \forall \varphi \in H(\alpha,+\infty) \quad \text{et à fortiori}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0 \quad \forall \varphi \in H_{(\alpha,+\infty)}$$

Nous utiliserons ces propriétés au paragraphe IV.6.

———X———

Dans le tableau ci-dessous, nous donnons les noyaux reproduisants des espaces hilbertiens habituels du type $W^{1,2}(X)$ pour $X = [0,1]$; (cf. notation usuelle [31]) ainsi que le noyau de $H^1(\mathbb{R})$. Ces noyaux sont tous obtenus, en considérant que les conditions à satisfaire par le noyau :

$$\begin{cases} g(.,\lambda) \in H & \forall \lambda \in X \\ (g(.,\lambda)|\varphi) = \varphi(\lambda) & \forall \lambda \in X \ , \ \forall \varphi \in H \end{cases}$$

sont la formulation variationnelle d'un problème aux limites que l'on peut expliciter aisément, l'opérateur étant un opérateur du second ordre du type sturm-Liouville.

———X———

ESPACE	X	Norme - Nullités aux bords	Noyau reproduisant	Appellation classique de l'espace
H_1	$[0,1]$	$\|\varphi\|_{H_1} = \left[\int_0^1 (\varphi + \varphi'^2)(x)dx\right]^{1/2}$	$g(x,\alpha) = \frac{ch x\, ch(1-\alpha)}{sh1}$ $0 \leq x \leq \alpha$ $= \frac{ch\alpha\, ch(1-x)}{sh1}$ $\alpha \leq x \leq 1$	$H^1(X)$
H_2	$[0,1]$	$\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ $\|\varphi\|_{H_2} = \|\varphi\|_{H_1}$	$g(x,\alpha) = \frac{sh x\, sh(1-\alpha)}{sh1}$ $0 \leq x \leq \alpha$ $= \frac{sh\alpha\, sh(1-x)}{sh1}$ $\alpha \leq x \leq 1$	$H_0^1(X)$
$H_3 = H(\alpha\ \beta)$ pour $\alpha=0$ $\beta=1$	$[0,1]$	$\varphi(0) = 0$ $\|\varphi\|_{H_3} = \left[\int_0^1 \varphi'^2(x)dx\right]^{1/2}$	$g(x,\alpha) = \min(x,\alpha)$	
H_4	$[0,1]$	$\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ $\|\varphi\|_{H_4} = \|\varphi\|_{H_3}$	$g(x,\alpha) = x(1-\alpha)$ $0 \leq x \leq \alpha$ $= \alpha(1-x)$ $\alpha \leq x \leq 1$	
H_5	$]-\infty,+\infty[$	$\varphi, \varphi' \in L^2]-\infty,+\infty[$ $\|\varphi\|_{H_5} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi^2 + \varphi'^2)(x)dx\right]^{1/2}$	$g(x,\alpha) = \frac{1}{2} e^{-\|x-\alpha\|}$	$H^1(\mathbb{R})$

Exemple I.6.3.

Un espace de fonctions analytiques

$X =]-1,+1[$

On pose $\Phi = \{\varphi \in \mathbb{R}^X | \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ avec } \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty\}$

Si $\varphi, \Psi \in \Phi$ $\varphi(x) = \sum a_n x^n$

$\Psi(x) = \sum b_n x^n$

la forme bilinéaire $(\varphi,\Psi) \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$, munit Φ d'une structure hilbertienne.

L'application :

$$\varphi \in \Phi \to \{a_n\} \in \ell^2$$

est une isométrie de

$$H = \{\varphi \in \Phi | (\varphi|\Psi)_H = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n\} \quad \text{sur l'espace de suites } \ell^2 \ .$$

1°) *H* admet un noyau reproduisant

$$\text{On a } |\varphi(\alpha)| = |\sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n| \leq (\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n})^{1/2} \times (\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2)^{1/2}$$

soit pour $\alpha \in X$ $\quad |\varphi(\alpha)| \leq (\frac{1}{1-\alpha^2})^{1/2} \|\varphi\|_H$.

H admet donc un noyau reproduisant (théorème I.5.1).

2°) Noyau de *H*

$g(.,\alpha) \in H$ donc $g(x,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\alpha) x^n$, et on doit avoir pour tout φ de *H* , c'est-à-dire pour toute suite $\{a_n\}$ de ℓ^2 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n$$

d'où $u_n(\alpha) = \alpha^n$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$, et

$$g(x,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-x\alpha}$$

———X———

Nous étudierons au chapître II, quelques propriétés de H .

CHAPITRE II

ETUDE DE L'ESPACE HILBERTIEN H

ASSOCIE A UN NOYAU REPRODUISANT g DONNE

Introduction :

Le but de ce chapître est d'établir quelques propriétés de l'espace hilbertien H , $H \subset \mathbb{R}^X$, donné uniquement par son noyau reproduisant g .

1°) En introduisant la notion de support d'un noyau reproduisant, nous verrons qu'il est possible de se restreindre à l'étude des noyaux "positifs" sur X : $\forall n \geq 1$, $\forall (x_1,\ldots,x_n) \in X^n$, $\forall (A_1,A_2,\ldots,A_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x_i \neq x_j \quad \text{si} \quad i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_i A_j \, g(x_i,x_j) > 0).$$

Ceci nous sera très utile pour simplifier les démonstrations.

2°) A priori on sait simplement que H est inclus dans $\mathbb{R}^X$.
Nous essaierons de répondre à plusieurs questions :

I) Quelles restrictions apporter à g , pour que l'on puisse avoir des inclusions plus strictes du type :

$$H \subset E \subset \mathbb{R}^X$$

où E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^X$?

II) Si on a une telle inclusion, que peut-on dire de l'injection canonique de H dans E , lorsque E est muni d'une topologie ? (théorie des noyaux de SCHWARTZ).

3°) Enfin, nous donnerons un critère permettant de discerner parmi les fonctions de $\mathbb{R}^X$, celles qui appartiennent à H .
Nous dirons alors que nous avons caractérisé H .
Dans le cas où $H \subset \mathcal{C}^0(X)$, nous montrerons que ce critère peut être "affaibli". (critère moins sévère).

———X———

II.1. Notion de support d'un noyau reproduisant.

La notion que nous allons introduire, s'avèrera être extrêmement intéressante pour générer l'espace hilbertien H, associé à un noyau donné.
Considérons donc une fonction $g : (x,y) \in X * X \to g(x,y) \in \mathbb{R}$, représentant le noyau reproduisant d'un certain espace hilbertien H, $H \subset \mathbb{R}^X$ (g symétrique, définie positive ou nulle sur X). On suppose que $g \not\equiv 0$.

II.1.1. Définition de l'ensemble $\mathfrak{B}$:

On définit la famille $\mathfrak{B}$ de parties A de X, $\mathfrak{B} \subset P(X)$, de la manière suivante :

> Si $A \in P(X)$, $A \in \mathfrak{B}$ ssi quel que soit le nombre fini d'abscisses $(x_1,\ldots,x_n)$ distinctes dans A, le système correspondant $(g(.,x_1),\ldots,g(.,x_n))$ est libre.

II.1.2. Propriété :

Si on ordonne $\mathfrak{B}$ par inclusion, $\mathfrak{B}$ est inductif.

Démonstration :

Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille totalement ordonnée par inclusion, de $\mathfrak{B}$. On note $\overline{A} = \bigcup_{i \in I} A_i$.

a/ $\overline{A} \in \mathfrak{B}$. Considérons en effet n abscisses quelconques mais distinctes dans $\overline{A}$: $x_1,x_2,\ldots,x_n$.
A chaque valeur de k, $1 \leq k \leq n$, on peut associer $i_k \in I$ tel que : $x_k \in A_{i_k}$.
La famille $\{A_i\}_{i \in I}$ étant totalement ordonnée, il existe m, $1 \leq m \leq n$, vérifiant :

$$A_{i_k} \subset A_{i_m} \qquad k=1,2,\ldots,n$$

et donc $x_k \in A_{i_m}$ $\qquad k=1,2,\ldots,n$.

Mais $A_{i_m} \in \mathfrak{B}$, et les abscisses $x_1,\ldots,x_n$ sont distinctes, et donc le système $(g(.,x_1),\ldots,g(.,x_n))$ est libre.
On a donc $\overline{A} \in \mathfrak{B}$.

b/ $\overline{A}$ est le plus petit des majorants de la famille $\{A_i\}_{i\in I}$

en effet si $B \in \mathfrak{B}$, $B \supset A_i$, $\forall i \in I$, on a nécessairement

$$B \supset \bigcup_{i\in I} A_i = \overline{A} .$$

$\mathfrak{B}$ est donc inductif.

———X———

II.1.3. Définition des supports d'un noyau g :

$\mathfrak{B}$ étant inductif, d'après le théorème de ZORN (cf [18]), $\mathfrak{B}$ admet au moins un élément maximal. On prend alors comme

Définition II.1.3.

Une partie S de X , $S \in \mathfrak{B}$, et S maximale dans $\mathfrak{B}$, est appelée support du noyau g .

II.1.4. Propriétés des supports d'un noyau g $(g \neq 0)$

Propriété 1.

On a quel que soit le support S de noyau g :

$$S \subset \{x \in X | g(.,x) \neq 0\} .$$

Ceci découle de la définition même de $\mathfrak{B}$.

Propriété 2.

Si $x \notin S$, $x \in X$, et $g(.,x) \neq 0$, alors le système $(g(.,x),g(.,x_1),\ldots,g(.,x_n))$ n'est pas libre, pour un choix convenable d'un nombre fini $x_1,\ldots,x_n$ d'abscisses distinctes de S $(n \geq 1)$.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait $S \cup \{x\} \in \mathcal{B}$, et S ne serait pas maximale. Il en découle la :

Propriété 2'.

Si S est un support de g , l'ensemble $\{g(.,x) | x \in S\}$ est une base de $H_o = L(g(.,x) | x \in X)$.

On peut alors montrer sans difficulté les propriétés suivantes que nous énoncerons sans démonstration.

Propriété 3.

S'il existe $x \in X$, $x \notin S$, $g(.,x) \neq 0$, alors on peut trouver y , $y \in S$ tel que :

$$S' = S - \{y\} + \{x\}$$

soit un support de g .

Propriété 4.

Le noyau g admet un support unique ssi quel que soit l'entier n , $n \geq 1$, on a l'implication :

$$\left.\begin{array}{l} g(.,x_i) \neq 0 \quad i=1,2,\ldots,n \\ x_i \text{ distincts dans } X \end{array}\right| \Rightarrow (g(.,x_1),\ldots,g(.,x_n)) \text{ est libre}$$

et alors $S = \{x \in X | g(.,x) \neq 0\}$.

Propriété 5.

Si le système $(g(.,x_1),\ldots,g(.,x_n))$ est libre, $x_i \in X$ $i=1,2,\ldots,n$, il existe un support S de g tel que $x_i \in S$ $i=1,2,\ldots,n$.

———*———

Remarques :

1) La notion de support est donc liée, à celle de base de l'espace vectoriel $V = L(g(.,x)|x \in X)$, espace engendré par les combinaisons linéaires finies :

$$\sum_{i=1}^{n} A_i g(.,x_i) \quad , \quad x_i \in X \quad , \quad A_i \in \mathbb{R} \qquad i=1,2,\ldots,n$$

Tous les vecteurs d'une base $\{g(.,x)|x \in S\}$, appartiennent donc à l'ensemble des générateurs de V.

2) La notion de support peut être généralisée, à toute fonction g de deux variables définie sur un domaine "rectangulaire"

$(x,y) \in X * Y \to g(x,y) \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

———*———

II.2. Importance de la notion de support. Espaces H^S.

II.2.1. Les espaces H^S.

Soit $X \subset \mathbb{R}$ et g une fonction symétrique, définie positive ou nulle sur X. Au couple (X,g) on peut donc faire correspondre l'espace hilbertien H, $H \subset \mathbb{R}^X$, de noyau reproduisant g.

$(X,g) \to H \subset \mathbb{R}^X$

Soit S un support de g.

On note $g_{|S}$ la restriction à $S \times S$ de la fonction g.

Il est clair que $g_{|S}$ est une fonction, symétrique, définie positive, sur S.

On peut donc faire correspondre au couple $(S, g_{|S})$ l'espace hilbertien noté H^S, $H^S \subset \mathbb{R}^S$, de noyau reproduisant $g_{|S}$.

$$(S, g_{|S}) \to H^S \subset \mathbb{R}^S$$

II.2.2. Lien entre H et H^S

Pour $f \in \mathbb{R}^X$ on note :

$$r_S(f) = f_{|S} \in \mathbb{R}^S$$

la restriction de la fonction f à S. En particulier $g_{|S} = r_S(g)$

On a alors :

Théorème II.2.2.

$r_S(H) = H^S$, et r_S est une isométrie de H sur H^S.

Démonstration :

Nous avons noté (chapitre I) $H_o = L(g(.,x) | x \in X)$. Notons de même $H_o^S = L(g(.,x)_{|S} | x \in S)$. Les espaces H et H^S sont générés respectivement à partir des espaces préhilbertiens H_o et H_o^S (cf théorème I.4.1). Montrons que $H_o^S = r_S(H_o)$.

* Si $f = \sum_{i=1}^{n} A_i g(.,x_i)$ $\left.\begin{array}{l} x_i \in X \\ A_i \in \mathbb{R} \end{array}\right|$ $i=1,2,\ldots,n$ (1)

$f \in H$ et

on a par définition de S :

$$g(.,x_i) = \sum_{k=1}^{p(i)} \alpha_i^k g(.,x_i^k) \qquad (2)$$

avec $\alpha_i^k \in \mathbb{R}$, $x_i^k \in S$ $\quad i=1,2,\ldots,n \quad k=1,2,\ldots,p(i)$

d'où :

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p(i)} A_i \alpha_i^k g(.,x_i^k) \tag{3}$$

et

$$\left\| \begin{array}{l} r_S(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p(i)} A_i \alpha_i^k g(.,x_i^k)_{|S} \in H_o^S \qquad (4) \\ \\ \|r_S(f)\|_{H_o^S} = \|f\|_{H_o} \qquad (5) \end{array} \right.$$

* Réciproquement soit $h \in H_o^S$:

$$h = \sum_{i=1}^{n} A_i g(.,x_i)_{|S} \qquad \begin{array}{l} x_i \in S \\ A_i \in \mathbb{R} \end{array} \quad i=1,2,\ldots,n \tag{6}$$

On a alors aussi :

$$f = \sum_{i=1}^{n} A_i g(.,x_i) \in H_o \quad \text{et} \quad r_S(f) = h \tag{7}$$

D'autre part f donné par (7), est l'unique élément de H_o dont la restriction à S est égale à h . Il suffit en effet de vérifier l'implication :

$$\left. \begin{array}{l} f_1, f_2 \in H_o \\ f_1 = f_2 \quad \text{sur} \quad S \end{array} \right\| \quad \Rightarrow \quad f_1 = f_2 \quad \text{sur} \quad X$$

Il en est bien ainsi car si $x \in X$, $x \notin S$ on a nécessairement

$$g(.,x) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j g(.,\alpha_j) \qquad \begin{array}{l} \alpha_j \in S \\ \beta j \in \mathbb{R} \end{array} \quad j=1,2,\ldots,m$$

et alors :

$$f_1(x) = \left[f_1, g(.,x)\right]_{H_o} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j f_1(\alpha_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j f_2(\alpha_j) = \left[f_2, g(.,x)\right]_{H_o} = f_2(x) \ .$$

* On a donc montré que r_S est une isométrie de H_o sur H_o^S, et cette isométrie se prolonge en une isométrie de H sur H^S (on rappelle qu'une fonction f de H — respectivement H^S — est la limite ponctuelle d'une suite de CAUCHY de H_o — respectivement H_o^S).

———*———

II.2.3. Application $r_S^{-1} : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^X$.

La démonstration du théorème II.2.2 a permis de constater que l'application r_S^{-1} est parfaitement définie sur H^S. Nous étendons la définition de r_S^{-1} à $\mathbb{R}^S$ en prenant donc si $h \in \mathbb{R}^S$

$$\left[r_S^{-1}(h)\right]_{(x)} = h(x) \qquad \text{si } x \in S$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i\, h(x)_i \qquad \text{si } x \notin S \text{ avec } g(.,x) = \sum_{i=1}^{n} A_i g(.,x_i)$$

$$x_i \in A \ , \ A_i \in \mathbb{R} \quad i=1,2,..n.$$

$r_S^{-1}(h) \in \mathbb{R}^X$, et est parfaitement définie, car la représentation $g(.,x) = \sum_{i=1}^{n} A_i g(.,x_i)$ $x \notin S$ $x_i \in S$ $i=1,2,\ldots,$ n est nécessairement unique d'après la définition de S.

On a alors comme conséquence du théorème II.2.2.

Théorème II.2.3.

Soit $S \subset X$ un support du noyau reproduisant g, et $f \in \mathbb{R}^X$ Alors $f \in H$, espace hilbertien associé à g ssi

1) $f_{|S} \in H^S$

2) $r_S^{-1}(f_{|S}) = f$.

II.2.4. Cas où S est fini.

Si $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $\quad x_i \in X \quad i=1,2,\ldots,n$

alors H^S et donc H sont de dimension finie

$$\dim(H^S) = \dim(H) = \mathrm{card}(S) = n$$

et on a trivialement $H = H_o = L(g(.,x_i) \mid i=2,2,\ldots,n)$.

Réciproquement, si H est de dimension n, il est clair que pour tout support S de son noyau reproduisant on a $\mathrm{card}(S) = n$ (cf paragraphe I.6.1) Nous donnerons ultérieurement des exemples.

———X———

Remarque :

Si l'application r_S^{-1} de $\mathbb{R}^S$ dans $\mathbb{R}^X$ est explicite, ce qui signifie que l'on connaît les relations de dépendance entre les $g(.,x)$, $x \in X$, alors d'après le théorème II.2.3, la détermination de l'espace H, se ramène à celle de l'espace H^S. Le noyau de H^S est $g_{|S}$ et H_S a comme support unique S. Dans ce qui suit nous allons nous intéresser à la détermination de l'espace H^S, ce qui revient pour alléger les notations à déterminer H, sachant que $S = X$.

———X———

II.3. Interpolation d'une fonction de $\mathbb{R}^X$, par des fonctions de H, espace hilbertien associé au noyau g.

II.3.1. S = X.

Nous sommes donc dans le cas où g est "positif" sur X.

$$\left.\begin{array}{l} n \geq 1 \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ distincts} \\ \text{dans } X \end{array}\right\| \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_i A_j g(x_i, x_j) > 0 .$$

Considérons $f \in \mathbb{R}^X$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $x_1,\ldots,x_n$ n abscisses de S, on note

$$W_{f;x_1,\ldots,x_n} \overset{\text{déf}}{=} \{\varphi \in H \mid \varphi(x_i) = f(x_i) \quad i=1,2,\ldots,n\} .$$

$W_{f;x_1,\ldots,x_n}$ est l'ensemble des éléments de H , qui interpolent la fonction f sur les noeuds $x_1,\ldots,x_n$.

Nous allons démontrer le :

Théorème II.3.1.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\forall (x_1,\ldots,x_n) \in X^n$, $\forall f \in \mathbb{R}^X$, l'ensemble $W_{f;x_1,\ldots,x_n}$ est non vide, et il existe une et une seule fonction notée $h_{f;x_1,\ldots,x_n}$ dans H vérifiant :

$$\| h_{f;x_1,\ldots,x_n} \| = \min_{\varphi \in W_{f;x_1,\ldots,x_n}} \| \varphi \|_H .$$

La fonction $h_{f;x_1,\ldots,x_n}$ appartient à $V = L(g(.,x_i) \mid i=1,2,\ldots,n)$, variété linéaire engendrée dans H par $g(.,x_1),\ldots,g(.,x_n)$.

De plus si $f \in H$, $h_{f;x_1,\ldots,x_n}$ est la projection orthogonale de f sur V .

Démonstration :

Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer les abscisses $x_1,\ldots,x_n$ toutes distinctes.

1) $W_{f;x_1,\ldots,x_2}$ est non vide

Considérons un élément φ quelconque dans V .

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} A_i g(.,x_i) \qquad (1)$$

On peut imposer à φ de coïncider avec f sur les noeuds x_i $i=1,2,\ldots,n$, en choisissant les coefficients A_i , $i=1,2,\ldots,n$ de

sorte que :

$$\sum_{i=1}^{n} A_i g(x_j,x_i) = f(x_j) \qquad j=1,\ldots,n \qquad (2)$$

(2) est un système linéaire, à matrice régulière ($x_1,\ldots,x_n$ distinctes dans $X = S$) et admet donc une solution unique. $W_{f;x_1,\ldots,x_n}$ n'est donc pas vide.

2) Existence et unicité de $h_{f;x_1,\ldots,x_n}$

$W_{f;x_1,\ldots,x_n}$ est un sous-espace vectoriel affine dans H, et par conséquent $h_{f;x_1,\ldots,x_n}$ existe et est unique. $h_{f;x_1,\ldots,x_n}$ est la projection orthogonale de $0 \in H$ sur $W_{f;x_1,\ldots,x_n}$.

3) $h_{f;x_1,\ldots,x_n} \in V$

Soit $V^{\perp}$ le complémentaire orthogonal de V dans H, et $k \in V^{\perp}$. On a :

$$k(x_i) = (k|g(.,x_i)) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad (3)$$

et donc :

$$(k+ h_{f;x_1,\ldots,x_n})(x_i) = h_{f;x_1,\ldots,x_n}(x_i) = f(x_i) \quad i=1,2,\ldots n \qquad (4)$$

Autrement dit :

$$k+h_{f;x_1,\ldots,x_n} \in W_{f,x_1,\ldots,x_n} \qquad \forall k \in V^{\perp}$$

On a alors d'après la propriété de minimalité de $h_{f;x_1,\ldots,x_n}$

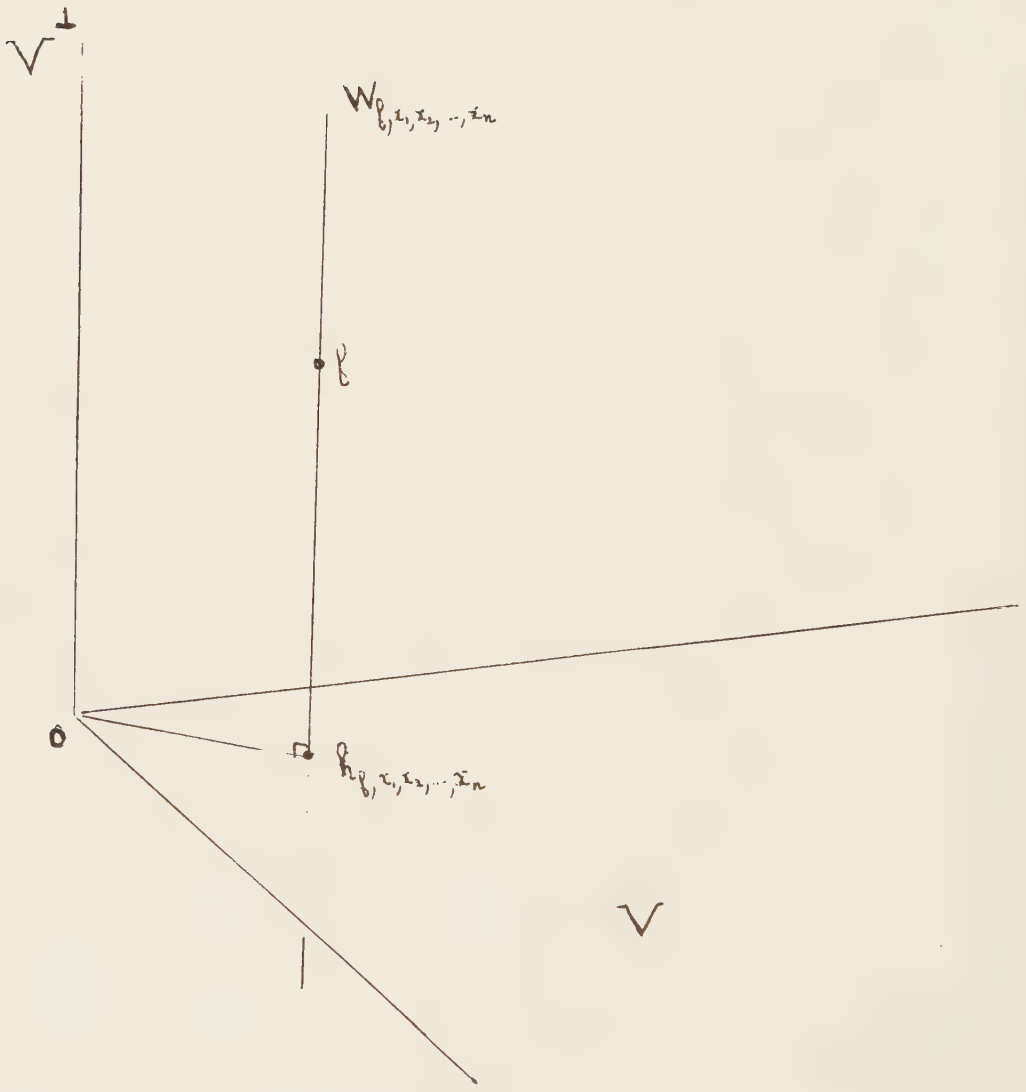
$$\|k+h_{f;x_1,\ldots,x_n}\|_H \geq \|h_{f;x_1,\ldots,x_n}\|_H \qquad \forall k \in V^{\perp} \qquad (5)$$

ce qui signifie que $h_{f;x_1,\ldots,x_n} \in V$.

4) Si $f \in H$, d'après 3) et 2), $h_{f;x_1,\ldots,x_n}$ est l'unique élément de V, vérifiant (2), c'est-à-dire tel que :

$$(f - \sum_{i=1}^{n} A_i g(.,x_i) \,|\, g(.,x_j))_H = 0 \quad j=1,2,\ldots,n \qquad (6)$$

Autrement dit $h_{f;x_1,\ldots,x_n}$ est la projection orthogonale de f sur V.



II.3.2. Cas général $S \subset X$

Le théorème II.3.1 est en défaut si $S \subset X$.
$\neq$

Pour qu'il demeure valide il faut ajouter sur f la contrainte

$$r_S^{-1}(f_{|S}) = f \qquad \text{(cf théorème II.2.3)}$$

Donnons un exemple illustrant cette condition.

Exemple :

$$X = [0,2]$$

$$g(x,\alpha) = \min(x,\alpha,1) \cdot \max(x,\alpha) \qquad (x,\alpha) \in X \times X$$

Nous pouvons vérifier directement que g est un noyau reproduisant avec :

a/ $g(.,0) = 0$

b/ $g(.,\alpha) = \frac{\alpha}{\beta} g(.,\beta)$ si $\alpha,\beta \in]0,1]$

c/ $(g(.,x_1),\ldots,g(.,x_n))$ est libre, quel que soit $n \geq 1$, et $x_1,\ldots,x_n$ distinctes dans $[1,2]$.

Dans ces conditions un support S de g est de la forme :

$$S =]1,2] \cup \{\alpha_o\} \text{ avec } \alpha_o \in]0,1].$$

En particulier on peut choisir $S = [1,2]$.
On a dans ce cas pour $f \in \mathbb{R}^X$:

$$\boxed{r_S^{-1}(f_{|S}) = f} \not\Leftarrow \boxed{f(x) = Kx \quad \forall x \in [0,1] \quad (K \in \mathbb{R}).}$$

Nous verrons au chapitre III, la justification des points b,c.

———X———

II.4. Caractérisation de l'espace hilbertien H, associé au noyau reproduisant g.

Nous nous proposons de donner un critère permettant de discerner parmi les fonctions de $\mathbb{R}^X$, celles qui appartiennent à H.

II.4.1. Cas $S = X$

On a le résultat suivant :

Théorème II.4.1.

Soit $H \subset \mathbb{R}^X$, l'espace hilbertien associé au noyau g, de support $S = X$.

Si $f \in \mathbb{R}^X$, les propositions suivantes sont équivalentes

1) $f \in H$

2) Il existe une constante positive M_f, ne dépendant que de f, telle que :

$$\forall n \geq 1 \quad \forall (x_1,\ldots,x_n) \in X^n \qquad \|h_{f;x_1,\ldots,x_n}\|_H \leq M_f$$

où $h_{f;x_1,\ldots,x_n}$ est la spline d'interpolation de f sur les noeuds $x_1,\ldots,x_n$.

3) $\forall n \geq 1$, $\forall (x_1,\ldots,x_n) \in X^n$, $\forall (A_1,\ldots,A_n) \in R^n$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} A_i g(.,x_i) \right\|_H$$

De plus si $f \in H$, on a :

$$\|f\|_H = \sup_{\substack{n \geq 1 \\ (x_1,\ldots,x_n) \in X^n}} \|h_{f;x_1,\ldots,x_n}\|_H$$

Démonstration :

(1) ➔ (2). D'après le théorème II.3.1, $h_{f;x_1,\ldots,x_n}$ est la projection orthogonale de f sur $V : L(g(.,x_i)|\ i=1,2,\ldots,n)$. On a donc $\|h_{f;x_1,\ldots,x_n}\|_H \leq \|f\|_H$ et on peut prendre $M_f = \|f\|_H$.

(2) ➔ (3). Par définition même de $\varphi = h_{f;x_1,\ldots,x_n}$ on a

$$\varphi \in H \quad \text{et} \quad \varphi(x_i) = f(x_i) \qquad i=1,2,\ldots,n$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} A_i \varphi(x_i) = (\varphi | \sum_{i=1}^{n} A_i g(.,x_i))$$

d'où :

$$|\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)| \leq \|\varphi\|_H \times \|\sum_{i=1}^{n} A_i g(.,x_i)\|_H \leq M_f \|\sum_{i=1}^{n} A_i g(.,x_i)\|_H .$$

(3) ➔ (1). Considérons sur $H_o = L(g(.,x)|x \in X)$, muni de sa structure préhilbertienne, l'application L_f :

$$h = \sum_{i=1}^{n} A_i g(.,x_i) \in H_o \to L_f(h) = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \in \mathbb{R}$$

Il s'agit bien d'une application, car $h \in H_o$ admet une représentation unique $(X = S)$. L'application L_f est linéaire, et elle est bornée par hypothèse :

$$|L_f(h)| \leq M_f \|h\|_{H_o} \qquad \forall h \in H_o$$

L_f peut donc être prolongée, en une application linéaire $\tilde{L}_f$ de $H = \overline{H}_o$ dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de F. RIESZ (cf. [27]) il existe $z_f \in H$ tel que :

$$\tilde{L}_f(h) = (z_f|h)_H \qquad \forall h \in H .$$

En particulier si on prend $h = g(.,x)$, x quelconque dans X

$$\tilde{L}_f(g(.,x)) = L_f(g(.,x)) = f(x)$$

et :

$$\tilde{L}_f(g(.,x)) = (z_f | g(.,x)) = z_f(x)$$

Donc $f = z_f \in H$.

———— X ————

Norme de f dans H

D'après ce qui précède si $f \in H$ on a :

$$\|f\|_H = \|z_f\|_H = \sup_{\substack{h \in H_o \\ h \neq 0}} \frac{|L_f(h)|}{\|h\|_{H_o}}$$

Pour $n \geq 1$, $(x_1,\ldots,x_n) \in X^n$, $(A_1,\ldots,A_n) \in \mathbb{R}^n$ on note

$$G_n = (g(x_i,x_j))_{i,j=1,\ldots,n} \quad , \quad G_n \in M_n(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} \quad , A \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \bar{f}_n = \begin{vmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{vmatrix} \quad , \quad \bar{f}_n \in \mathbb{R}^n$$

On a alors :

$$\|f\|^2 = \text{Sup}\left\{ \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)\right|^2}{\left\|\sum_{i=1}^{n} A_i g(.,x_i)\right\|^2_{H_o}} = \frac{(\bar{f}_n^{+} A)^2}{A^{+} G_n A} \;\middle|\; \begin{array}{l} n \geq 1,\ (x_1,\ldots,x_n)\in X^n\ x_i \neq x_j \text{ si } i\neq j \\ (A_1,A_2,\ldots,A_n) \in \mathbb{R}^n\ ,\ A \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$= \text{Sup}\left\{ \bar{f}_n^{+} G_n^{-1} \bar{f}_n \;\middle|\; n \geq 1\ ,\ (x_1,\ldots,x_n) \in X^n\ ,\ x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j \right\}$$

$$= \text{Sup}\left\{ \|h_{f;x_1,\ldots,x_n}\|^2 \;\middle|\; n \geq 1\ ,\ (x_1,\ldots,x_n) \in X^n \right\} \quad \text{(cf paragraphe II.3).}$$

ce qui achève la démonstration.

———X———

II.4.2. Cas général : $S \subset X$.

On devra rajouter la condition sur f :

$$r_S^{-1}(f_{|S}) = f\ .$$

On peut énoncer par exemple :

Théorème II.4.2.

Soit $H \subset \mathbb{R}^X$, l'espace hilbertien associé au noyau reproduisant g , de support $S \subset X$, et $f \in \mathbb{R}^X$.
Alors $f \in H$ ssi

(1) $r_S^{-1}(f_{|S}) = f$

(2) Il existe une constante positive M_f , ne dépendant que de f , telle que :

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \geq 1 \\ \forall (x_1,\ldots,x_n) \in S^n \end{array}\right\} \quad \|h_{f;x_1,\ldots,x_n}\|_H \leq M_f$$

où $h_{f;x_1,\ldots,x_n}$ est la spline d'interpolation de f , sur les noeuds

$x_1,\ldots,x_n$.

Et pour $f \in H$ on a :

$$\|f\|_H = \sup_{\substack{n \geq 1 \\ (x_1,\ldots,x_n) \in S^n}} \|h_{f;x_1,\ldots,x_n}\|_H \cdot$$

(Remarquons que si la condition (1) est satisfaite, on peut prendre les $x_i \in X$ $i=1,2,\ldots,n$ dans (2)).

———X———

Ainsi pour pouvoir décider si une fonction f de $\mathbb{R}^X$ appartient à H, il est nécessaire de pouvoir expliciter les splines d'interpolation de f, et calculer leur norme.
Nous verrons au chapitre III, que cela est possible pour une classe importante de noyaux.

———X———

II.5. Espaces hilbertiens de fonctions continues, à noyaux reproduisants.

On s'intéresse maintenant à l'inclusion de H dans un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^X$. On suppose que X est muni de la topologie, trace de la topologie de $\mathbb{R}$.
$\mathcal{C}^0(X)$ désigne l'espace des fonctions continues sur X, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

II.5.1. Quand a-t-on $H \subset \mathcal{C}^0(X)$?

On a à ce sujet le résultat simple :

Théorème II.5.1.

$H \subset C^0(X)$ ssi

1°) g est séparément continuesur X

2°) g(x,x) est localement borné sur X

Rappelons que g est dite séparément continue sur X si l'application $x \to g(x,\alpha)$ est continue sur X, et ce quel que soit $\alpha \in X$.
De la symétrie de g, il découle que l'application $y \to g(\alpha,y)$ est alors également continue sur X, quel que soit $\alpha \in X$.

Démonstration :

1) Condition suffisante.

Soit $x \in X$. On veut montrer que pour tout φ, $\varphi \in H$, φ est continue en x. Il suffit donc de considérer les points x non isolés dans X.

Soit x un tel point, et $\{x_n\}$ une suite dans X, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Par hypothèse, il existe un voisinage V_x de x, $V_x \subset X$ tel que

$$0 \leq g(y,y) \leq M \qquad \forall y \in V_x.$$

Puisque $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow 0 \leq g(x_n,x_n) \leq M \qquad (1)$$

On a aussi puisque g est séparément continue sur X

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n,\xi) = g(x,\xi) \qquad \forall \xi \in X \qquad (2)$$

ou encore

$$\lim_{n\to\infty} (g(.,x_n)\,|\,g(.,\xi)) = (g(.,x)\,|\,g(.,\xi)) \quad \forall \xi \in X \qquad (3)$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} (g(.,x_n)\,|\,\varphi) = (g(.,x)\,|\,\varphi) \quad \forall \varphi \in H_o \qquad (4)$$

Or $\bar{H}_o = H$. De (1), (4) il résulte : (théorème de la convergence faible d'opérateurs linéaires continues dans un espace de Hilbert : Banach-Steinhaus cf [27])

$$\lim_{n\to\infty} (g(.,x_n)\,|\,\varphi) = (g(.,x)\,|\,\varphi) \quad \forall \varphi \in H \qquad (5)$$

ou encore

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x) \qquad \forall \varphi \in H \qquad (6)$$

φ est donc continue en x. x n'étant pas précisé dans X on a $H \subset \mathcal{C}^0(X)$.

2) Condition nécessaire.

Par définition de g, on a $g(.,\alpha) \in H$, $\forall \alpha \in X$.
Donc $H \subset \mathcal{C}^0(X)$ => $g(.,\alpha) \in \mathcal{C}^0(X)$, $\forall \alpha \in X$ et g est séparément continue sur X.

D'autre part si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, on a pour $\varphi \in H \subset \mathcal{C}^0(X)$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$$

donc $$\lim_{n\to\infty} (g(.,x_n)|\varphi) = (g(.,x)|\varphi), \quad \forall \varphi \in H$$

Autrement dit $g(.,x_n)$ converge faiblement vers $g(.,x)$ lorsque n tend vers l'infini, et donc $\|g(.,x_n)\|_H^2 = g(x_n,x_n) \leq M^2_{\forall n}$ (cf. [27])

Ceci ayant lieu quel que soit la suite $\{x_n\}$ convergente vers x, on a nécessairement

$$0 \leq g(y,y) \leq K$$

dans un voisinage V_x de x, et g(x,x) est localement borné sur X.

———X———

Exemple

$$\begin{cases} X =]-1,+1[\\ g(x,\alpha) = \dfrac{1}{1-x\alpha} \end{cases}$$

On vérifie que S = X (cf. § II.6.a)

g est séparément continue sur X et $g(x,x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ est localement bornée sur X. On a donc $H \subset \mathcal{C}^0(X)$. Nous l'avons vu directement par définition même de H (§ I.6.3).

———X———

Remarque

Il se peut que les hypothèses | g séparément continue
g(x,x) localement bornée

ne soient pas vérifiées sur X, mais le soient sur S, S support de g. Dans ce cas on a donc $H^S \subset \mathcal{C}^0(S)$, mais on n'a plus $H \subset \mathcal{C}^0(X)$ (cf. exemple III.8.3)

II-5-2. Caractérisation de H lorsque $H \subset \mathcal{C}^0(X)$ ou seulement $H^S \subset \mathcal{C}^0(S)$

Les théorèmes II.4.1 et II.4.2 donnent une caractérisation de l'espace hilbertien H, associé au noyau g, lorsqu'aucune hypothèse particulière n'est faite sur g. Si nous formulons des hypothèses du type

$\mathcal{H}_1$: g est séparément continue

$\mathcal{H}_2$: g(x,x) est localement bornée

nous allons voir que nous pouvons affaiblir les conditions des théorèmes cités. On a :

Théorème II.5.2.

Soit H l'espace hilbertien associé au noyau g, de support $S = X$, vérifiant les hypothèses $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sur X, et soit $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'abscisses, dense dans X. Alors $H \subset \mathcal{C}^0(X)$ et pour $f \in \mathcal{C}^0(X)$ les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \in H$

(ii) Il existe une constante positive M_f, ne dépendant que de f, telle que

$$\forall n \geq 1 \qquad \|h_n\|_H \leq M_f$$

ou $h_n = h_{f;x_1,\ldots,x_n}$ est la spline d'interpolation de f, sur les noeuds $x_1,\ldots,x_n$ (n premiers termes de la suite $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$)

De plus pour $f \in H$ on a $\|f\|_H = \lim_{n\to\infty} \nearrow \|h_n\|_H$.

Démonstration :

$H \subset C^0(X)$ (cf. théorème II.5.1.)

(i) => (ii) c'est une conséquence du théorème II.4.1.

(ii) => (i) La spline d'interpolation de f sur les n premiers noeuds $x_1,\ldots,x_n$ vérifie par hypothèse : $\|h_n\| \leq M_f$, $\forall n$.

La boule unité de H étant faiblement compacte (cf. [27]) on peut extraire de la suite $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, une suite $\{h_{n'(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers $h \in H$. . On a alors quel que soit $i \geq 1$

$$h(x_i) = (h|g(.,x_i)) = \lim_{n\to\infty} (h_{n'(n)}|g(.,x_i))$$

$$= \lim_{n\to\infty} h_{n'(n)}(x_i) = f(x_i)$$

la limite étant atteinte dès que $n'(n) \geq i$.

On a donc $f = h$ sur $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, qui est dense dans X.

Mais $h \in H \subset C^0(X)$ et $f \in C^0(X)$. Donc $f = h$ sur X et $f \in H$.

———X———

Norme de f dans H

De par la définition de h_n, la suite $\{\|h_n\|\}$ est croissante. Pour $f \in H$ elle est majorée et donc converge.

D'autre part $(h_n|f) = \|h_n\|^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (h_n est la projection orthogonale de f sur $L(g.,x_i))$ $i = 1,2,\ldots,n)$). On a donc

$$\|f\|_H^2 = (f|f) = \lim_n \nearrow (h_{n'(n)}|f) = \lim_n \nearrow (h_n|f)$$

$$= \lim_n \nearrow \|h_n\|^2$$

On a alors immédiatement (cf. théorème I.4.2.) le

Corollaire :

Soit H l'espace hilbertien associé au noyau reproduisant g, de support $S \subset X$, vérifiant les hypothèses $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sur S, et soit $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'abscisses dense dans S ; alors $H^S \subset \mathcal{C}^0(S)$ et pour $f \in \mathbb{R}^X$ et vérifiant $f_{|S} \in \mathcal{C}^0(S)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \in H$

(ii) $r_S^{-1}(f_{|S}) = f$ et

il existe une constante positive M_f, ne dépendant que de f, telle que

$\forall n \geq 1 : \|h_n\|_H \leq M_f$

où $h_n = h_{f;x_1,\ldots,x_n}$ est la spline d'interpolation de f sur les noeuds $x_1,\ldots,x_n$.

De plus pour $f \in H$ on a $\|f\|_H = \lim_n \nearrow \|h_n\|_H$.

Remarques

(1) La spline h_n d'interpolation de f sur les noeuds $x_1,\ldots,x_n$ vérifie $\lim \nearrow \|h_n\|_H = \|f\|$, autrement dit h_n converge en norme vers f lorsque n tend vers l'infini. En fait on peut montrer que l'on a convergence forte de h_n vers f. (Voir la démonstration du théorème II.5.1

(2) Soit H associé à g et vérifiant $H \subset \mathcal{C}^0(X)$.
Si $\tilde{X} \subset X$, on peut associer à $g_{|\tilde{X}}$ un espace $\tilde{H} \subset \mathcal{C}^0(\tilde{X})$.
Si de plus $\tilde{\tilde{X}} \supset X$, alors une suite dense dans $\tilde{X}$, permet de caractériser $\tilde{H}$, mais aussi H. Cela signifie que l'application

$$f \in H \to \tilde{f} = f_{|\tilde{X}} \in \tilde{H}$$

est une isométrie de H sur $\tilde{H}$.

II.5.3. - Applications

Considérons à nouveau l'espace de l'exemple I.6.3.

$$H = \{f \in \mathbb{R}^X \mid f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ \Sigma a_n^2 < +\infty,\ \|f\|_H^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \}$$

où

$$X =]-1,+1[$$

On a

$$g(x,\alpha) = \frac{1}{1-x\alpha} \quad \text{et} \quad H \subset C^0(X).$$

On a en particulier

$$\left.\begin{array}{l} x^p \in H \\ \|x^p\| = 1 \end{array}\right| \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Nous allons établir quelques propriétés à l'aide du théorème II.5.2. Ces propriétés ne sont établies qu'à titre de curiosité, et l'utilisation du théorème II.5.2., ne justifie en rien l'établissement de ce théorème qui trouvera sa pleine application au chapitre III.

|I| Matrice de Gramm associée à N fonctionnelles d'évaluation dans et support du noyau de .

Soient x_i, $i = 1,2,\ldots,N$, N abscisses distinctes dans $X =]-1,+1[$ et

$$G_n = (g(x_i,x_j)) = \left(\frac{1}{1-x_i x_j}\right)$$

On pose

$$F_N(x) = \prod_{i=1}^{N} (x-x_i) \qquad (1)$$

$$H_N(x) = x^N F_N\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (2)$$

On a alors (cf. [41]) la

Propriété :

G_N est inversible et $G_N^{-1} = D_N G_N D_N$ avec D_N matrice diagonale d'éléments $d_{ii} = \dfrac{H_N(x_i)}{F'_N(x_i)}$ $\quad i = 1,2,\ldots,N.$

D'après la propriété 4, § II.1.4., sur l'unicité du support, on a donc $S = X =]-1,+1[$.

Nous savons par ailleurs que $H \subset C^0(X)$.
Nous pouvons donc appliquer le théorème II.5.2. qui caractérise les fonctions de $C^0(X)$ qui appartiennent à H.

Considérons une suite $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, dense dans $X =]-1,+1[$, avec $x_i \neq x_j$, si $i \neq j$.
Si on note h_N, la spline d'interpolation de $f \in C^0(X)$ sur les noeuds $x_1,\ldots,x_N$ on a (cf. § II.4.1.)

$$\|h_N\|^2 = \bar{f}_N^{\dagger}\, G_N^{-1}\, \bar{f}_N = \bar{f}_N^{\dagger}\, D_N\, G_N\, D_N\, \bar{f}_N$$

où

$$\bar{f}_N \in \mathbb{R}^N \quad , \quad \bar{f}_N = \begin{vmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{vmatrix}$$

et on a (théorème II.5.2.) si $f \in H$

$$\|f\|_H^2 = \lim_{N\to\infty} \nearrow \bar{f}_N^{t}\, D_N\, G_N\, D_N\, \bar{f}_N$$

$$= \lim_{N\to\infty} \nearrow \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{H_N(x_i)H_N(x_j)}{F'_N(x_i)F'_N(x_j)} \times \frac{f(x_i)f(x_j)}{1-x_i.x_j}$$

En particularisant f, nous allons obtenir quelques résultats intéressants.

2 Une propriété de la matrice G_N^{-1}

On prend $f = 1$; $f \in H$ et $\|f\|_H = 1$.
On a donc

$$\lim_{N\to+\infty} \nearrow \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{H_N(x_i)H_N(x_j)}{F'_N(x_i)F'_N(x_j)} \times \frac{1}{1-x_i x_j} = \lim_{N\to\infty} \nearrow \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (G_N^{-1})_{ij} \right) = 1 \quad (1)$$

Nous allons expliciter la quantité

$$A_{N,0} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{H_N(x_i)H_N(x_j)}{F'_N(x_i)F'_N(x_j)} \times \frac{1}{1-x_i x_j} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (G_N)^{-1}_{ij} \quad (2)$$

Ecrivons

$$A_{N,0} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \frac{H_N(x_j)}{F'_N(x_j)} \quad (3)$$

avec

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{N} \frac{H_N(x_i)}{F'_N(x_i)} \times \frac{1}{1-x_i x_j} \qquad j = 1,2,\ldots,N \quad (4)$$

Si on pose

$$H_{N,j}(x) = \frac{H_N(x)}{1-x x_j} = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} (1-x x_k) \quad (5)$$

on peut interpréter λ_j, comme la différence divisée de $H_{N,j}(x)$ sur les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_N$ (cf. [28]). $H_{N,j}(x)$ étant de degré au plus égal à N-1, λ_j est égal au coefficient de x^{N-1} dans $H_{N,j}(x)$ soit :

$$\lambda_j = (-1)^{N-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} x_k \quad (6)$$

et d'après (3)

$$A_{N,0} = (-1)^{N-1} \left(\prod_{k=1}^{N} x_k \right) \times \sum_{j=1}^{N} \frac{H_N(x_j)}{x_j F'_N(x_j)} \quad (7)$$

En décomposant $\frac{H_N(x)}{xF_N(x)}$ en éléments simples, on obtient

$$\frac{H_N(x)}{xF_N(x)} = \frac{\alpha_o}{x} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{x-x_k} \tag{8}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_o = \dfrac{H_N(0)}{F_N(0)} = (-1)^N \times \dfrac{1}{\prod_{k=1}^{N} x_k}\ , \\ \\ \alpha_k = \dfrac{H_N(x_k)}{x_k F'_N(x_k)} \qquad k = 1,2,\ldots,N \end{cases} \tag{9}$$

En étudiant le comportement de $\frac{H_N(x)}{xF_N(x)}$ au voisinage de l'infini on a aussi

$$\alpha_o + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k = (-1)^N \prod_{k=1}^{N} x_k \tag{10}$$

et en reportant dans (7)

$$A_{N,O} = (-1)^{N-1} \left(\prod_{k=1}^{N} x_k \right) \times \sum_{k=1}^{N} \alpha_k = 1 - \prod_{k=1}^{N} x_k^2 \tag{11}$$

On a donc

$$\boxed{A_{N,O} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (G_N^{-1})_{ij} = 1 - \prod_{k=1}^{N} x_k^2}$$

On vérifie bien que pour $x_k \in]-1,+1[$, $k = 1,2,\ldots,N$
$0 \leq A_{N,O} \leq 1$, et que $A_{N,O}$ est une fonction croissante de N.
On a $A_{N,O} = 1$ ssi l'une des abscisses x_k est nulle, ce qui correspond au fait que $g(.,0) \equiv 1$.

3

Etendons les définitions (1), (2) de H_N et F_N au disque unité du plan complexe $D = \{z \mid |z| \leq 1\}$.

$$F_N(z) = \prod_{k=1}^{N} (z-x_k) \tag{12}$$

$$H_N(z) = z^N \, F(\frac{1}{z}) \tag{13}$$

On considère $f \in H$, $f = x^m$, $\|f\|_H = 1$.
On a

$$\|f\|^2 = \lim_{N\to\infty} \nearrow \; A_{N,m} = 1$$

avec

$$A_{N,m} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{H_N(x_i)H_N(x_j)}{F'_N(x_i)F'_N(x_j)} \times \frac{x_i^m x_j^m}{1-x_i x_j} \tag{14}$$

En utilisant l'identité

$$x^n-1 = (x-1)\,(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)$$

On peut écrire

$$A_{N,m} = A_{N,0} - \sum_{p=0}^{m-1} \beta^2_{p,N} \tag{15}$$

avec

$$\beta^2_{p,N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^p H_N(x_i)}{F'_N(x_i)} \tag{16}$$

On a donc, compte tenu que $\lim_{N\to\infty} \nearrow A_{N,m} = \lim_{N\to\infty} \nearrow A_{N,0} = 1$,

$$\lim_{N\to\infty} \beta_{p,N} = 0 \qquad p = 0,1,2,\ldots,m-1 \tag{17}$$

Or si C est le cercle unité du plan complexe, on peut écrire (théorème des résidus cf. [18])

$$\beta_{p,N} = \int_C \frac{z^p H_N(z)}{F_N(z)}\, dz \qquad p = 0,1,\ldots,m-1$$

m étant arbitraire, on a montré que

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \int_C \frac{z^p H_N(z)}{F_N(z)}\, dz = 0 \qquad \forall p \in \mathbb{N}}$$

———X———

Remarque :

Monsieur BERNARD * nous a indiqué que ce résultat quoique non classique, pouvait être dérivé de la "théorie des produits de BLASCHKE!". (cf. [20]).

---

* Professeur, Laboratoire de Mathématiques Pures Grenoble.

II.6 - Immersion d'un espace hilbertien de fonctions dans un espace vectoriel topologique. Noyau de SCHWARTZ

L'objet de ce paragraphe est de rappeler les aspects de la théorie des noyaux de Schwartz, qui nous seront utiles dans la suite.
Les démonstrations données ici sont originales, en ce sens que n'envisageant pas les problèmes sous leur plus grande généralité nous pouvons justifier aisément les théorèmes annoncés.

Rappelons d'abord la définition d'un sous-espace hilbertien d'un espace vectoriel topologique.

Définition II.6 (L. SCHWARTZ cf [38])

Un espace hilbertien H, est appelé sous-espace hilbertien, de l'espace vectoriel topologique E, et on note $H \hookrightarrow E$, si

1°) $H \subset E$

2°) l'injection canonique de H dans E est continue.

On a alors (cf. résultats de N. ARONSZAJN)

Théorème II.6.1.

Si $E = \mathbb{R}^X$ muni de la topologie de la convergence ponctuelle, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $H \subset \mathbb{R}^X$ admet un noyau reproduisant

(2) $H \hookrightarrow E$

Considérons le cas où E = $\mathcal{C}^0(X)$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. On a

Théorème II.6.2.

Pour que l'espace hilbertien H, $H \subset \mathbb{R}^X$, de noyau reproduisant g ($H \hookrightarrow \mathbb{R}^X$) soit sous-espace hilbertien de E il faut et il suffit que

1°) g soit séparément continue sur X

2°) g(x,x) soit localement borné sur X

Démonstration :

D'après le théorème II.5.1. nous sommes conduits à démontrer l'équivalence

$$H \hookrightarrow E \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftarrows}} H \subset \mathcal{C}^0(X)$$

* L'implication (1) est évidente par définition de E.

* Démontrons l'implication (2). $H \subset \mathcal{C}^0(X) \Rightarrow H \hookrightarrow E$.
On note i, l'injection canonique de H dans E.
La topologie sur E est définie par la famille de semi-normes

$$f \to p_K(f) = \operatorname{Max}_{x \in K} |f(x)| \qquad K \text{ compact de } X.$$

Or i étant linéaire, elle est continue si et seulement si pour chaque semi norme p_K, l'application $p_K \circ i$ est continue sur H. (cf. [37]).

D'autre part, K compact et g(x,x) localement borné sur X entraîne

$$|g(x,x)| = g(x,x) \leq M_K^2 \quad , \quad \forall x \in K$$

et donc

$$|f(x)|^2 = |(f|g(.x))_H|^2 \leq \|f\|_H^2 \, g(x,x) \leq M_K^2 \, \|f\|_H^2 \qquad \forall x \in K \quad \forall f \in H.$$

d'où

$$|(p_k \circ i)(f)| \leq M_K \, \|f\|_H \quad , \quad \forall f \in H$$

$p_k \circ i$ est donc continuesur H quel que soit le compact K de X, et i est donc continue de H dans E , et $H \subsetneq E$.

———X———

On retiendra l'équivalence :

$H \subsetneq E$ = $C^0(X)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact	$\overset{\rightarrow}{\leftarrow}$	$H \subset C^0(X)$

On a alors le corollaire immédiat :

Théorème II.6.3.

Pour que H, $H \subset \mathbb{R}^X$, de noyau reproduisant g, soit sous-espace hilbertien de $E = C^0(X)$, muni de la topologie de la convergence uniforme (X compact) il faut et il suffit que

1°) g soit séparément continue sur X

2°) g(x,x) soit borné sur X.

Exemples :

1) - $X =]-1,+1[$

$$g(x,\alpha) = \frac{1}{1-x\alpha}$$

On a donc $H \subsetneq E = C^0(X)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

———×———

2) - $X = [0,1]$

$g(x,\alpha) = \min(x,\alpha) \times (1+\rho \times \max(x,\alpha))$ cf. exemple III.8.1

Toutes les conditions sont requises pour que l'espace hilbertien H associé à g soit un sous-espace hilbertien de $E = C^0(X)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur X. (en abrégé $H \hookrightarrow C^0_{[0,1]}$)

3) - $H_i \subsetneq C^0_{[0,1]}$ $i = 1,2,3,4$ si les H_i sont les espaces considérés au paragraphe I.6.2.

———×———

Noyau de Schwartz

Nous nous restreignons ici à la considération d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$). L. SCHWARTZ a montré (cf [38]) qu'il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble $L^+(E',E)$ des applications linéaires, symétriques et positives de E' dans E, et l'ensemble $\mathcal{H}(E)$ des sous-espaces hilbertiens de E (en supposant que E est un espace vectoriel localement convexe, séparé et quasi-complet : E evt lcsqc).

Si $L \in \mathcal{L}^+(E',E)$ et $H \in \mathcal{HC}(E)$ sont associés dans cette correspondance on dit que L est le noyau de H (nous dirons noyau de Schwartz pour éviter des confusions avec noyau reproduisant) et on a les propriétés suivantes ($<,>$ désigne la dualité entre E et E')

1°) $H = \overline{L(E')}$

2°) $(h|Le')_H = <e',h> \qquad \forall e' \in E', \quad \forall h \in H$

En particulier si $E = \mathbb{R}^X$, muni de la topologie de la convergence ponctuelle, alors E' est l'espace des mesures à support fini dans X :

$$e' \in E' \overset{\rightarrow}{\leftarrow} e' = \sum_{i=1}^{N} A_i \delta_{x_i} \qquad \begin{matrix} A_i \in \mathbb{R} \\ x_i \in X \end{matrix} \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

et on a les relations suivantes entre noyau de Schwartz et noyau reproduisant :

* Si $H \subset E$ admet $L \in \mathcal{L}^+(E',E)$ comme noyau de Schwartz, le noyau reproduisant g de h est défini (cf. propriété 2°) ci-dessus) par

$$g(x,y) = <L\delta x, \delta y> = (L\delta x|L\delta y)_H$$

* Réciproquement si $H \subset \mathbb{R}^X$ admet le noyau reproduisant g, c'est-à-dire $H \hookrightarrow E$ alors le noyau de Schwartz L de H est défini par

$$L\left(\sum_{i=1}^{N} A_i \delta_{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{N} A_i \, g(.x_i)$$

Nous verrons au chapitre V, l'utilisation du noyau de Schwartz.

———x———

CHAPITRE III

LES NOYAUX FACTORISABLES.

ESPACES HILBERTIENS ASSOCIES.

Introduction

Nous nous proposons de déterminer les espaces hilbertiens associés à un certain type de noyaux reproduisants : les noyaux factorisables, que nous allons au préalable définir.

III.1 - Fonction factorisable xur $X \subset \mathbb{R}$. Noyau factorisable

Définition III.1.1

Une fonction symétrique $g : (x,y) \in X * X \to g(x,y) \in \mathbb{R}$ est dite factorisable (sur X) s'il existe deux fonctions a, b telles que

$$g(x,y) = a(x)b(y) \quad \text{si } x \leq y$$
$$= a(y)b(x) \quad \text{sinon}$$
$$(x,y) \in X * X$$

a,b sont appelées, dans cet ordre, les composantes de g.

On peut écrire de façon plus condensée : $g(x,y) = a(\min(x,y)) * b(\max(x,y))$

Définition III.1.1.

Un noyau reproduisant g est appelé noyau factorisable, si g est une fonction factorisable.

Exemple :

Le noyau de $H(\alpha,\beta)$ s'écrit (cf. § I.6.2.)

$$g(x,y) = \min(x,y) \qquad (x,y) \in]\alpha,\beta[\times]\alpha,\beta[$$

g est donc factorisable

Ses composantes sont $\begin{cases} a(x) = x \\ b(x) = 1 \end{cases}$ $\forall x \in]\alpha,\beta[$

———— x ————

III-2 - Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction factorisable sur X soit un noyau reproduisant

Si g est factorisable sur X, g est symétrique. g sera un noyau reproduisant si cette fonction est également définie positive ou nulle sur X. On a le :

Théorème III.2

La fonction g, factorisable sur X, de composantes a,b, est un noyau factorisable ssi

1°) $v = \frac{b}{a}$ est positive, non croissante sur

$M = \{x \in X \mid a(x)b(x) \neq 0\}$

2°) si $a(x_0) = 0$ $(x_0 \in X)$ alors on a

- soit $b(x_0) = 0$
- soit $a(x) = 0$ $\forall x \leq x_0, \quad x \in X$

si $b(x_0) = 0$ $(x_0 \in X)$ alors on a

- soit $a(x_0) = 0$
- soit $b(x) = 0$ $\forall x \geq x_0, \quad x \in X$

Démonstration

Condition nécessaire : Soient $x,y \in M$, $x < y$. Puisque g est un noyau reproduisant la matrice de Gramm de $(g(.,x),g(.,y))$ est symétrique définie positive ou nulle.

Ce grammien est $G = \begin{pmatrix} g(x,x) & g(x,y) \\ g(x,y) & g(y,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x)b(x) & a(x)b(y) \\ a(x)b(y) & a(y)b(y) \end{pmatrix}$

soit $G = \begin{pmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & a(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(x)-v(y) & 0 \\ 0 & v(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & a(y) \end{pmatrix}$ (1)

$a(x)\,a(y) \neq 0$ et G symétrique définie positive $\Rightarrow v(x)-v(y) \geq 0$

$v(y) \geq 0$,

et donc v est positive, non croissante sur M.
(on a en fait $v(y) > 0$, $y \in M$).

D'autre part, si H est l'espace hilbertien associé à g, on a

$$\|g(.,x)\|^2 = g(x,x) = a(x)b(x) \geq 0 \quad \forall x \in X \tag{2}$$

Si $x_o \in X$ vérifie $a(x_o) = 0$, alors d'après (2) $g(.,x_o) = 0$ (3)
Or

$$\left.\begin{array}{ll} g(.,x_o) = a(x)\ b(x_o) & x \leq x_o \\ = a(x_o)b(x) = 0 & \text{sinon} \end{array}\right| \quad x \in X \tag{4}$$

D'après (3), (4), on a donc soit $b(x_o) = 0$

soit $a(x) = 0 \quad \forall x \leq x_o,\ x \geq X$

On démontrerait de même, la condition portant sur b.

Condition suffisante : Pour montrer qu'une fonction factorisable, vérifiant les propriétés 1°) et 2°) est un noyau reproduisant, nous allons démontrer que la matrice $G_n = (g(x_i,x_j))_{i,j=1,2,\ldots,n}$, associée à n abscisses quelconques dans X, est symétrique définie positive ou nulle.

Or G_n définie positive ou nulle $\overset{\rightarrow}{\leftarrow}$ $P^t G_n P$ définie positive ou nulle où P est une matrice de permutation quelconque. On peut choisir cette permutation de façon à n'avoir à envisager que le cas

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$$

et alors

$$G_n = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ & & & \\ a_1b_n & a_2b_n & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} \qquad (5)$$

avec

$$a_i = a(x_i)$$

$$i = 1,2,\ldots,n$$

$$b_i = b(x_i)$$

Par hypothèse, si $a_i = 0$ alors $\left|\begin{array}{ll} \text{soit } b_i = 0 & \\ \text{soit } a_j = 0 & j \leq i \end{array}\right.$

De même, si $b_i = 0$ on a $\left|\begin{array}{ll} \text{soit } a_i = 0 & \\ \text{soit } b_j = 0 & j \geq i \end{array}\right.$

Dans les deux cas on a donc à la fois i-ième ligne et la ième colonne de G_n qui sont nulles. On peut donc pour montrer la définie positivité de G_n se restreindre au cas $a_ib_i \neq 0$ $\quad i = 1,2,\ldots,n$, c'est-à-dire $x_i \in M$, $i = 1,2,\ldots,n$

Posons alors

$$D_n = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \qquad L_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

En posant $v_i = v(x_i) = \dfrac{b_i}{a_i}$ $\quad i = 1,2,\ldots,n$ (7)
on obtient

$$\Lambda_n = L_n^{t^{-1}} D_n^{-1} G_n D_n^{-1} L_n^{-1} = \begin{pmatrix} (v_1 - v_2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (v_{n-1} - v_n) \\ & & v_n \end{pmatrix}$$ matrice diagonale $n \times n$ (8)

Par hypothèse on sait que v est positive, non croissante sur M. La matrice Λ_n est donc définie positive, et il en est alors de même de G_n (D_n est régulière ainsi que L_n).

Ce qui achève la démonstration.

———X———

Nous allons présenter maintenant sous forme de remarques, quelques propriétés importantes découlant du théorème III.2, et qui nous seront utiles par la suite.

Remarque III.2.1.

Si $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, avec $x_i \in P$, $\quad i = 1,2,\ldots,n$

où P est une partie de X sur laquelle v est définie et strictement positive, strictement décroissante on a d'après (8) :

$$\boxed{\begin{array}{l} G_n = D_n L_n {}^t\Lambda_n L_n D_n \\ \text{et} \\ G_n^{-1} = D_n^{-1} L_n^{-1} \Lambda_n^{-1} L_n^{t-1} D_n^{-1} \end{array}} \qquad (9)$$

Remarque III.2.2.

En posant $\hat{v}(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{1}{v(x)}$ on a de manière analogue si

$$\hat{D}_n = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix} \qquad \hat{\Lambda}_n = \begin{pmatrix} \hat{v}_1 & & 0 \\ & (\hat{v}_2 - \hat{v}_1) & \\ & & \ddots \\ 0 & & (\hat{v}_n - \hat{v}_{n-1}) \end{pmatrix}$$

$$\hat{v}_i = \hat{v}(x_i) \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

$$\boxed{\begin{array}{l} G_n = \hat{D}_n L_n \hat{\Lambda}_n L_n^t \hat{D}_n \\ \text{et} \\ G_n^{-1} = \hat{D}_n^{-1} L_n^{t-1} \hat{\Lambda}_n^{-1} L_n^{-1} \hat{D}_n^{-1} \end{array}} \qquad (10)$$

Remarque III.2.3.

La matrice G_n^{-1} est tridiagonale et on a en explicitant (10) par exemple :

$$G_n^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad (11)$$

avec

$$\begin{cases} \beta_i = \dfrac{1}{\mu_{i,i+1}} & i = 1,2,\ldots,n-1 \\ \alpha_1 = -\dfrac{a_2}{a_1} \times \dfrac{1}{\mu_{1,2}} & \\ \alpha_i = \dfrac{\mu_{i+1,i-1}}{\mu_{i-1,i} \times \mu_{i,i+1}} & i = 2,3,\ldots,n-1 \\ \alpha_n = -\dfrac{b_{n-1}}{b_n} \times \dfrac{1}{\mu_{n-1,n}} & \end{cases} \qquad (12)$$

et

$$\mu_{i,j} = a_i b_j - a_j b_i \qquad i,j = 1,2,\ldots,n$$

Remarque III.2.4.

Dans (12) on a $\mu_{i,i+1} \neq 0$ c'est-à-dire $\beta_i \neq 0 \quad i = 1,2,\ldots,n-1$
Réciproquement si B est une matrice tridiagonale symétrique

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$ vérifiant $\beta_i \neq 0 \quad i=1,2,\ldots,n-1$

La matrice inverse de B, si elle existe, s'écrit

$$(B^{-1})_{ji} = (B^{-1})_{ij} = a_i b_j \qquad 1 \leq i \leq j \leq n$$

les a_i, b_i étant donnés par l'algorithme suivant (cf. [5]) (la singularité essentielle de B est détectée)

(1)
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} a_1 \\ a_{q+1} = -\dfrac{\alpha_q a_q + \beta_{q-1} a_{q-1}}{\beta_q} \qquad q = 2,3,\ldots,n-1 \end{cases}$$

(2) $\lambda = \beta_{n-1} a_n + \alpha_n a_n \neq 0 \overset{\rightarrow}{\leftarrow}$ B régulière

(3) Si $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} b_n = \dfrac{1}{\lambda} \\ b_{n-1} = -\dfrac{\alpha_n}{\beta_{n-1}} b_n \\ b_{q-1} = -\dfrac{\alpha_q a_q + \beta_q b_{q+1}}{\beta_{q-1}} \qquad q = n-1, n-2, \ldots, 2 \end{cases}$$

Si on ne fait pas l'hypothèse $\beta_i \neq 0$, $i = 1,2,\ldots,n-1$ alors B^{-1} si elle existe, est une matrice bloc-diagonale, chacun des blocs pouvant être obtenu à partir de l'algorithme précédent.

Le coût d'obtention de B^{-1} est de

* 6n-5 multiplications ou divisions

* 2n-1 additions

* $\frac{n(n+1)}{2}$ multiplications

calcul de a_i, b_i $i=1,2,\ldots,n$

calcul des $(B^{-1})_{ij}$ $i,j=1,2,..n$

D'autre part, B^{-1} peut être mémorisée à l'aide de 2n mémoires seulement, ce qui est extrêmement important dans la pratique.

Notons enfin que cette technique semble devoir s'appliquer, à des matrices blocs-tridiagonales, symétriques (cf. [26]).

Remarque III.2.5.

Les conditions 2°) du théorème III.2 signifient que pour $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in M$, alors a et b ne peuvent s'annuler que simultanément en un point x de $[x_1, x_2] \cap X$.

———X———

En conclusion nous retiendrons que le théorème III.2 permet de caractériser simplement une classe importante de noyaux reproduisants. Cela est intéressant dans la mesure où étant donné une fonction g, définie sur X * X, il est très difficile en général de déterminer si cette fonction est un noyau reproduisant.

———X———

III.3 - Exemples de noyaux factorisables

(1°)
$$\begin{cases} X = [0,1] \\ a(x) = b(x) = x \qquad \forall x \in X \end{cases}$$

On a $v(x) = 1$, $\forall x \in X$ et v est positive, non croissante sur $M =]0,1]$

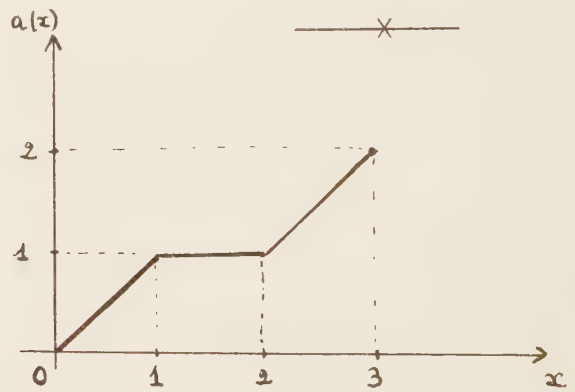
———×———

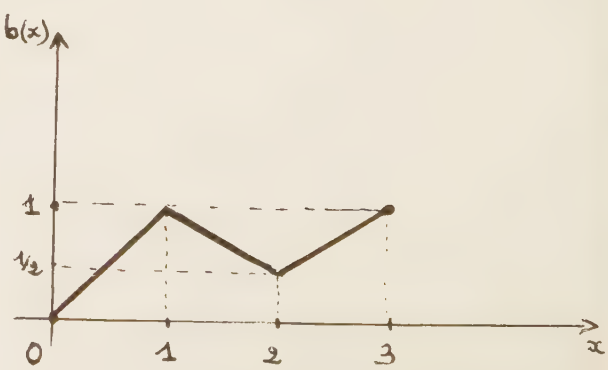
(2°)
$$\begin{cases} X = [0,1] \\ a(x) = b(x) = x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

On a encore $v(x) = 1$ $(x \in X \quad x \neq \frac{1}{2})$ et v est positive, non croissante sur $M = [0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1]$.
On vérifie que a et b s'annulent simultanément en $x = \frac{1}{2}$, ce qui illustre la remarque III.2.5.

———×———

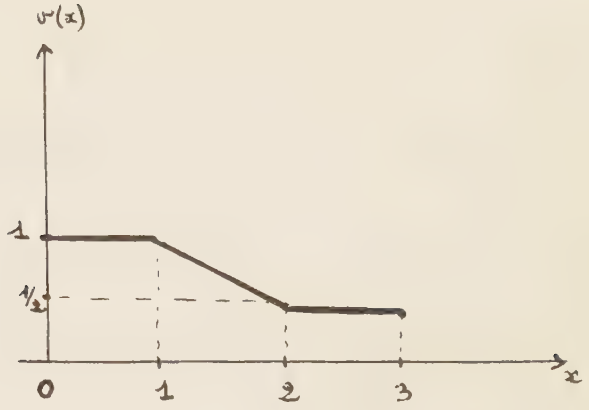
(3°)
$$\begin{cases} X = [0,3] \\ a(x) = x \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \quad\;\; = 1 \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \quad\;\; = x-1 \quad 2 \leq x \leq 3 \\ b(x) = x \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \quad\;\; = \frac{3-x}{2} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \quad\;\; = \frac{x-1}{2} \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$





On a ici $M = X-\{0\}$ et

$$v(x) = 1 \qquad 0 \leq x \leq 1$$
$$= \frac{3-x}{2} \qquad 1 \leq x \leq 2$$
$$= \frac{1}{2} \qquad 2 \leq x \leq 3$$



———X———

(4°)
$$\begin{cases} X = \dot{\mathbb{N}} \\ a(n) = n \\ b(n) = 1 \qquad \forall n \in \dot{\mathbb{N}} \end{cases}$$

On a ici $M = \dot{\mathbb{N}} = X$ et $v(n) = \frac{1}{n}$ positive, non croissante sur M.

———X———

(5°)
$$\begin{cases} X = \mathbb{R}^+ \\ a(x) = n, \qquad n-1 \leq x \leq n \qquad n \geq 1 \\ b(x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

On a ici encore M = X et v positive, non croissante sur M.

———X———

Nous verrons ultérieurement que les exemples (4°) et (5°) correspondent à des espaces hilbertiens de suites (à une isométrie évidente près dans (5°)).

———X———

(6°) Un exemple de fonction factorisable qui n'est pas un noyau reproduisant

$$\begin{cases} X =]0,\infty[\\ a(x) = x \\ b(x) = 1 \quad \text{si } x \neq 1 \\ \quad\;\; = 0 \quad \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On a ici $M = X$ et v est strictement positive, strictement décroissante sur M mais la condition (2°) du théorème III.2 n'est pas satisfaite puisque $a(1) \neq 0$, $b(1) = 0$ et $b(x) \neq 0 \quad x > 1$.

———X———

III.4 - Etude des supports d'un noyau factorisable sur X.

III.4.1. - Supports d'un noyau factorisable

D'après la démonstration du théorème III.2, le système $(g(.,x_1),\ldots,g(.,x_n))$ est libre si et seulement si

(1) $a(x_i)b(x_i) \neq 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n$

(2) $i \neq j \Rightarrow v(x_i) \neq v(x_j)$

On a donc :

Théorème III.4.1.

Un support d'un noyau g, factorisable sur X, est une partie S de X telle que

1°) v est strictement positive, strictement décroissante sur S

2°) S est maximale (au sens de l'inclusion)

III.4.2. - Signification de la relation $v(\alpha) = v(\beta) \neq 0$, $\alpha < \beta$, $\alpha,\beta \in X$

On a donc $\alpha,\beta \in M = \{x \in X \mid a(x)b(x) \neq 0\}$, et puisque v est non croissante sur M, on a $v(x) = v(\alpha) \quad \forall x \in M \cap [\alpha,\beta]$. D'après les résultats précédents (théorème III.2) le système $(g(.,x),g(.,\alpha))$ n'est donc pas libre, quel que soit $x \in M \cap [\alpha,\beta]$. Autrement dit $g(.,x)$ et $g(.,\alpha)$ sont proportionnelles.

Or $g(t,x) = a(t)b(x)$ si $t \leq x$

$g(t,\alpha) = a(t)b(\alpha)$ si $t \leq \alpha$ $\qquad t \in X$

C'est-à-dire

$$g(t,x) = \frac{b(x)}{b(\alpha)}\, g(t,\alpha) \qquad t \leq \alpha \qquad t \in X.$$

Cette relation est donc également vérifiée $\forall t \in X$

et on a :

$$v(\alpha) = v(\beta) \neq 0 \Rightarrow \quad g(.,x) = \frac{b(x)}{b(\alpha)}\, g(.,\alpha) = \frac{a(x)}{a(\alpha)}\, (g.,\alpha)$$

$$\forall x \in M \cap [\alpha,\beta]$$

En conséquence, si H est l'espace hilbertien associé à g, on a

$$\varphi(x) = \frac{b(x)}{b(\alpha)}\,\varphi(\alpha) = \frac{a(x)}{a(\alpha)}\,\varphi(\alpha) \qquad \forall \varphi \in H \quad \forall x \in M \cap [\alpha,\beta]$$

ou encore

$$\boxed{v = \text{cte sur } A \subset X \Rightarrow \frac{\varphi}{b} \text{ (ou } \frac{\varphi}{a}) = \text{cte sur } A \quad \forall \varphi \in H \quad \text{(la constante dépendant de } \varphi)}$$

Remarque

De l'ensemble des considérations précédentes, il ressort que si g est un noyau factorisable sur X on a

$$\left.\begin{array}{l} g(.,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, g(.,x_i) \\ (g(.,x_1) \ldots g(.,x_n)) \text{ libre} \\ \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,\ldots,n. \end{array}\right| \Rightarrow n = 1$$

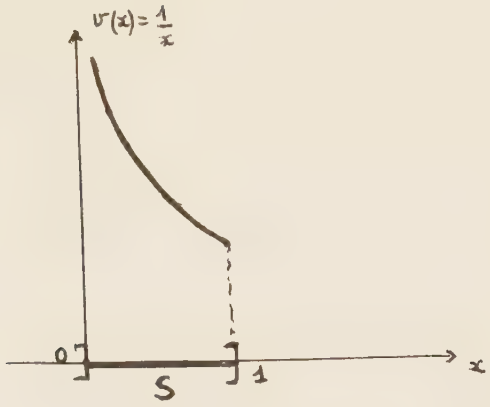
Autrement dit les seules relations de dépendance possibles sont des relations de proportionnalité.

———X———

III.4.3. - Exemples de supports

Nous reprendrons certains des exemples de noyaux factorisables donnés au § III.3.

1°) $\begin{cases} X = [0,1] \\ a(x) = x \\ b(x) = 1 \end{cases}$

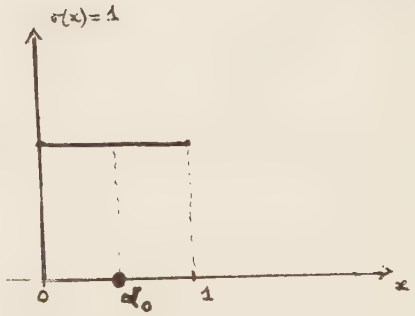


Il y a unicité du support $S =]0,1]$

———X———

2°) Exemple 1 § III.3.

$\begin{cases} X = [0,1] \\ a(x) = b(x) = x \quad \forall x \in X \end{cases}$



Tout support S est réduit à un point :
$S = \{\alpha_o\} \quad \alpha_o \in]0,1]$

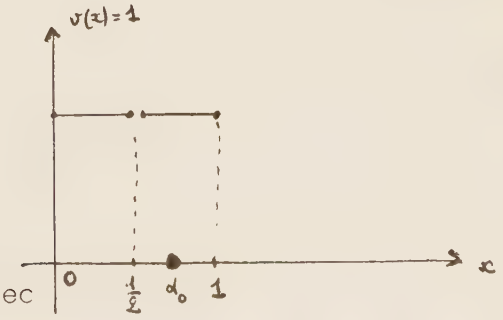
On a dans ce cas (cf. §. II.2.4.) explicitement

$$H = \{\varphi \mid \varphi(x) = Ax, \quad \|\varphi\|_H = |A|\}$$

———X———

3°) Exemple 2 § III.3

$\begin{cases} X = [0,1] \\ a(x) = b(x) = x - \frac{1}{2} \end{cases}$

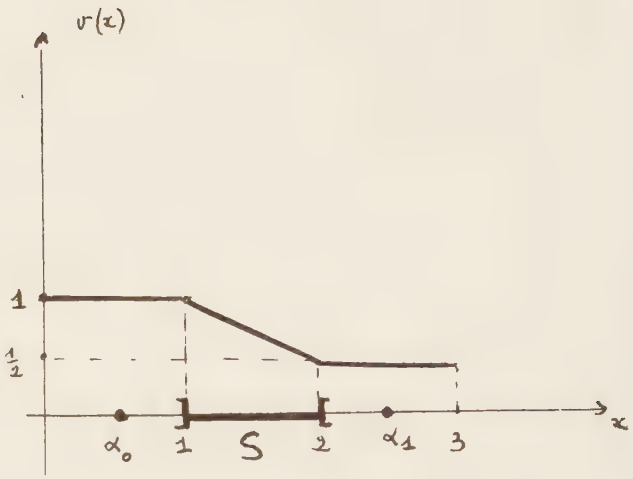


On a ici encore $S = \{\alpha_o\}$ avec
$\alpha_o \in]0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1]$ et

$$H = \{\varphi \mid \varphi(x) = A(x-\tfrac{1}{2}), \|\varphi\|_H = |A|\}$$

4°) Exemple 3 - § III.3

$$\begin{cases} X = [0,3] \\ a(x) = x \quad 0 \le x \le 1 \\ \quad\;\; = 1 \quad 1 \le x \le 2 \\ \quad\;\; = x-1 \quad 2 \le x \le 3 \\ b(x) = x \quad 0 \le x \le 1 \\ \quad\;\; = \dfrac{3-x}{2} \quad 1 \le x \le 2 \\ \quad\;\; = \dfrac{1+x}{2} \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$$



On a

$$S =]1,2[\cup \{\alpha_o, \alpha_1\},\ \alpha_o \in]0,1],\ \alpha_1 \in]2,3]$$

En particulier on peut prendre $S = [1,2]$.

———X———

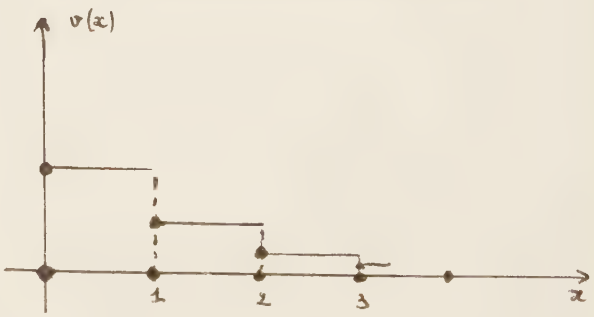
5°) Exemple 4 - § III.3

$$\begin{cases} X = \mathbb{N}^* \\ a(n) = n \\ b(n) = 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow S = \mathbb{N}^* = X.$$

———X———

6°) Exemple 5 - § III.3

$$\begin{cases} X = \mathbb{R}^+ \\ a(x) = n, \quad n-1 \le x \le n, \quad n \ge 1 \\ b(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$



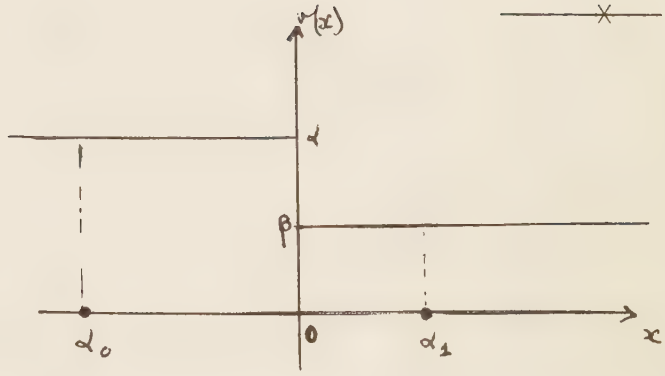
$$S = \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ avec } \alpha_n \in [n-1, n[, \quad n \in \mathbb{N}$$

On peut prendre en particulier

$S = \mathbb{N}$

7°) $\begin{cases} X = \mathbb{R} \\ a(x) = |x| \\ b(x) = -\alpha x \quad si\ x \leq 0 \\ \qquad = \beta x \quad si\ x \geq 0 \end{cases}$

$\alpha > \beta > 0$



S est de la forme $S = \{\alpha_o, \alpha_1\}$; $\alpha_o < 0$, $\alpha_1 > 0$
et on a explicitement (cf. § II.2.4.)

$$H = \{f \mid f(x) = c_o x \quad si\ x \leq 0 \qquad = c_1 x \quad si\ x \geq 0 \quad , \quad \|f\|_H^2 = \frac{(c_o + c_1)^2}{\alpha - \beta} + \frac{c_1^2}{\beta}\}$$

III-5 - Condition pour que H soit inclus dans $C^o(X)$ lorsque g est un noyau factorisable

Nous avons vu au § II.5.1. des conditions nécessaires et suffisantes sur g pour avoir $H \subset C^o(X)$. Peut on dans le cas d'un noyau g factorisable, donner des conditions ne portant que sur les composantes a, b de g, pour qu'il en soit ainsi ?

On a à ce sujet le :

Théorème III.5

Si H est l'espace hilbertien associé à un noyau g factorisable sur X, de composantes a,b , alors on a $H \subset C^0(X)$ ssi $a,b \in C^0(X)$.

Démonstration :

1°) $H \subset C^0(X) \Rightarrow a,b \in C^0(X)$

On a en effet

$g(x,\alpha) = a(x)b(\alpha)$ pour $x \in X, \quad x \leq \alpha$

et $g(.,\alpha) \in H \subset C^0(X)$. Donc $a \in C^0(X \cap]-\infty,\alpha[)$, $\forall \alpha \in X$, d'où $a \in C^0(X)$. On montrerait de même en considérant l'expression de $g(x,\alpha)$ pour $x \geq \alpha$, que $b \in C^0(X)$.

2°) $a,b \in C^0(X) \Rightarrow H \subset C^0(X)$.
De par la définition g : $g(.,\alpha) = a(\min(.,\alpha)) * b(\max(.,\alpha))$
on a donc $g(.,\alpha) \in C^0(X)$, $\forall \alpha \in X$.

Par ailleurs $x \to g(x,x) = a(x)b(x)$ est continue sur X, et donc localement bornée sur X. La condition suffisante du théorème II.5.1. permet de conclure : $H \subset C^0(X)$.

———X———

III.6 - Caractérisation de l'espace hilbertien H associé à un noyau factorisable g.

Nous allons pouvoir dans le cas d'un noyau g, factorisable sur X, expliciter un peu plus les théorèmes généraux de caractérisation II.4.1. et II.4.2. Cela tient au fait que nous savons alors expliciter les

splines d'interpolation d'une fonction f de $\mathbb{R}^X$, et calculer leur norme.

III.6.1. - Cas où S = X

Pour $f \in \mathbb{R}^X$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ abscisses distinctes dans X, on a vu § II.4.1. que l'on avait :

$$\| h_{f;x_1,\ldots,x_n} \|_H^2 = \bar{f}_n^{\dagger} G_n^{-1} \bar{f}_n \qquad (1)$$

avec

$$\bar{f}_n \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{f}_n = \begin{vmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{vmatrix}$$

$$G_n = (g(x_i, x_j))_{i,j=1,2,\ldots,n}, \quad G_n \in M_n(\mathbb{R})$$

L'expression (1) de $\| h_{f;x_1,\ldots,x_n} \|_H$ ne dépend que des x_i dans leur ensemble, et on peut calculer l'expression (1) pour $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $x_i \in S = X \quad i = 1,2,\ldots,n$.

On a immédiatement, en utilisant l'expression (8) de G_n^{-1} (§ III.2 remarque III.2.1.) et en posant

$$k(x) = \frac{f(x)}{a(x)} \qquad x \in X \qquad (2)$$

$$\boxed{\| h_{f;x_1,\ldots,x_n} \|_H^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{[k(x_i) - k(x_{i+1})]^2}{v(x_i) - v(x_{i+1})} + \frac{k^2(x_n)}{v(x_n)}} \qquad (3)$$

ou encore en utilisant la seconde expression de G_n^{-1} (expression (9) § III.2 remarque III.2.2.)

et posant $\hat{k}(x) = \frac{f(x)}{b(x)} \qquad x \in X$ (4)

$$\boxed{\|h_{f;x_1,\ldots,x_n}\|_H^2 = \frac{\hat{k}^2(x_1)}{\hat{v}(x_1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{[\hat{k}(x_{i+1})-\hat{k}(x_i)]^2}{\hat{v}(x_{i+1})-\hat{v}(x_i)}} \quad (5)$$

et on peut énoncer le théorème II.4.1. sous la forme plus explicite

Théorème III.6.1.

Soit H l'espace hilbertien associé au noyau g, factorisable sur X, de support S = X. Alors pour $f \in \mathbb{R}^X$, les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $f \in H$

2) il existe une constante positive M_f, ne dépendant que de f, telle que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{[k(x_i)-k(x_{i+1})]^2}{v(x_i)+v(x_{i+1})} + \frac{k^2(x_n)}{v(x_n)} = \frac{\hat{k}^2(x_1)}{\hat{v}(x_1)}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{[\hat{k}(x_{i+1})-\hat{k}(x_i)]^2}{\hat{v}(x_{i+1})-\hat{v}(x_i)} \leq M_f^2$$

$$\forall n \geq 1,\ \forall (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in X^n,\quad x_1 < x_2 < \ldots < x_n.$$

De plus pour $f \in H$ on a

$$\|f\|_H^2 = \sup_{\substack{n\geq 1 \\ (x_1,..,x_n)\in X^n \\ x_1<x_2<\ldots<x_n}} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{[k(x_i)-k(x_{i+1})]^2}{v(x_i)-v(x_{i+1})} + \frac{k^2(x_n)}{v(x_n)}\right]$$

III.6.2 - Cas général $S \subset X$

On a un énoncé tout à fait analogue. Il suffit d'adjoindre à la condition (2°) la condition supplémentaire $r_S^{-1}(f_{|S}) = f$, et de prendre $x_i \in S$, $i = 1,2,\ldots,n$.

———X———

III.7 - Cas particulier où $H \subset C^0(X)$ ou $H^S \subset C^0(S)$.

De façon similaire, on peut réénoncer le théorème II.5.2. et son corollaire dans le cas d'un noyau factorisable.

Hypothèses $\mathcal{H}_1$: g est séparément continue

$\mathcal{H}_2$: g(x,x) est localement borné.

Théorème III.7

Soit H, l'espace hilbertien associé au noyau factorisable g, de support S = X, et vérifiant les hypothèses $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sur X, et soit $x_{i\ i\in\mathbb{N}}$ une suite d'abscisses, dense dans X, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.
Alors $H \subset C^0(X)$ et pour $f \in C^0(X)$ les propositions suivantes sont équivalentes :

1°) $f \in H$

2°) $$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{[k(t_i)-k(t_{i+1})]^2}{v(t_i)-v(t_{i+1})} + \frac{k^2(t_n)}{v(t_n)}$$

$$= \frac{\hat{k}^2(t_1)}{\hat{v}(t_1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{[\hat{k}(t_{i+1})-\hat{k}(t_i)]^2}{\hat{v}(t_{i+1})-\hat{v}(t_i)} \leq M_f^2 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

où M_f est une constante, ne dépendant que de f, et où

$\{t_1,t_2,\ldots,t_n\} = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ avec $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$

De plus pour $f \in H$ on a

$$\|f\|_H^2 = \lim_{n\to\infty} \nearrow \left(\sum^{n-1} \frac{[k(t_i)-k(t_{i+1})]^2}{v(t_i)-v(t_{i+1})} + \frac{k^2(t_n)}{t_n} \right)$$

Si $X = [0,1]$ on peut prendre par exemple comme suite $\{x_i\}$ la suite générée par le partage dichotomique de $[0,1]$

$$\{x_i\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8} \ldots\}$$

On a alors pour $n = 2^{p-1}$

$$\{t_1, t_2, \ldots, t_n\} = \{\frac{i}{2^p} \; ; \; i = 1,2,\ldots,2^p-1\}$$

———X———

Pour $S \subset X$ on énoncera le

Corollaire

Soit H l'espace hilbertien, associé au noyau g, factorisable sur X de support $S \subset X$, vérifiant les hypothèses $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sur S, et soit $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, une suite dense dans S, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Alors $H^S \subset \mathcal{C}^0(S)$, et pour $f \in \mathbb{R}^X$ telle que $f_{|S} \in \mathcal{C}^0(S)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $f \in H$

2) $r_S^{-1}(f_{|S}) = f$ et

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{[k(t_i)-k(t_{i+1})]^2}{v(t_i)-v(t_{i+1})} + \frac{k^2(t_n)}{v(t_n)} = \frac{\hat{k}^2(t_1)}{\hat{v}(t_1)}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{[\hat{k}(t_{i+1})-\hat{k}(t_i)]^2}{\hat{v}(t_{i+1})-\hat{v}(t_i)} \leq M_f^2 \quad \forall n, \; n \geq 1$$

où M_f est une constante posivite ne dépendant que de f, et où $\{t_1,t_2,\ldots,t_n\} = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ $\quad t_1 < t_2 < \cdots < t_n$

De plus pour $f \in H$ on a

$$\|f\|_H^2 = \lim_{n\to\infty} \nearrow \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{[k(t_i)-k(t_{i+1})]^2}{v(t_i)-v(t_{i+1})} + \frac{k^2(t_n)}{v(t_n)} \right)$$

Exemple : Caractérisation des espaces $H(\alpha,\beta)$

Considérons les espaces $H(\alpha,\beta)$ introduits au § I.6.2.. $0 \leq \alpha < \beta$
$H(\alpha,\beta)$ est l'espace hilbertien de fonctions, définies sur $]\alpha,\beta[= X$,
associé au noyau reproduisant factorisable $g(x,\lambda) = \min(x,\lambda)$, $(x,\lambda) \in X * X$
Le support de g est $S = X$, et on sait que $H \subset C^0(X)$.
On peut donc appliquer les théorèmes III.6.1. ou III.7 indifféremment.
On a ici $k(x) = \frac{f(x)}{x}$; $v(x) = \frac{1}{x}$; $\hat{k}(x) = f(x)$; $\hat{v}(x) = x$ et on peut énoncer par exemple la :

Propriété III.7

Pour $0 \leq \alpha < \beta$, les propositions suivantes sont équivalentes : $(X =]\alpha,\beta[)$

1) $f \in H(\alpha,\beta)$

2) $f \in C^0_X$, $f' \in L^2(X)$, $f(0) = 0$ si $\alpha = 0$

3) Il existe une constante positive M_f, ne dépendant que de f, telle que

$$\forall n \geq 1 \quad \forall (x_1,x_2,..x_n) \in X^n \ (x_1<x_2<..<x_n) : \frac{f^2(x_1)}{x_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{[f(x_{i+1})-f(x_i)]^2}{x_{i+1}-x_i} \leq M_f^2$$

4) $$\forall n \geq 1 \qquad f^2(\alpha+\frac{\ell}{2^n}) + \sum_{i=1}^{2^n-1} [f(\alpha+\frac{(i+1)\ell}{2^n})-f(\alpha+\frac{i\ell}{2^n})]^2 \leq \frac{M_f^2}{2^n}$$

si $\beta < +\infty$, avec $\ell = \beta-\alpha$

et on a si $f \in H(\alpha,\beta)$

$$\|f\|_H^2 = \int_\alpha^\beta f'^2(x)\,dx + \frac{f^2(\alpha)}{\alpha} \qquad \text{si} \quad \alpha \neq 0$$

$$= \int_0^\beta f'^2(x)\,dx \qquad \text{si} \quad \alpha = 0$$

ou

$$\|f\|_H^2 = \sup_{\substack{n\geq 1 \\ (x_1,x_2,..,x_n)\in X^n \\ x_1<x_2<..<x_n}} \left[\frac{f^2(x_1)}{x_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{[f(x_{i+1})-f(x_i)]^2}{x_{i+1}-x_i}\right]$$

ou encore si $\beta < +\infty$ et $\ell = \beta-\alpha$

$$\|f\|_H^2 = \lim_{n\to+\infty} \nearrow 2^n \left[f^2(\alpha+\frac{\ell}{2^n}) + \sum_{i=1}^{2^n-1} \left(f(\alpha+\frac{(i+1)\ell}{2^n}) - f(\alpha+\frac{i\ell}{2^n})\right)^2\right]$$

———X———

III.8 - Détermination de l'espace hilbertien H, associé à un noyau factorisable sur X, de composantes continues sur X.

Si S est un support de g, noyau factorisable sur X, on a vu, cf. remarque § III.4.2., que l'application r_S^{-1} est très simple :

si $x \notin S$ on a soit $g(.,x) = 0$

soit $g(.,x) = \lambda g(.,y)$ $\quad y \in S$

alors pour $f \in \mathbb{R}^S$ on a

$$\begin{aligned}(r_S^{-1}f)(x) &= f(x) && \text{si } x \in S \\ &= 0 && \text{si } x \notin S \quad \text{et} \quad g(.,x) = 0 \\ &= \lambda f(y) && \text{si } x \notin S \quad \text{et} \quad g(.,x) = \lambda g(.y) \quad y \in S\end{aligned}$$

Dans le cas d'un noyau g factorisable, l'obtention de H à partir de H^S est donc chose aisée.

———X———

III.8.1. - Image par v ($v = \frac{b}{a}$) d'un support S du noyau g.

On a $v(S) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists x \in S,\ v(x) = \lambda\} \subset]0,+\infty[$ (1)

Notons $v_X = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists x \in X,\ a(x)b(x) \neq 0,\ v(x) = \lambda\} \subset]0,+\infty[$ (2)

On a la :

Propriété III.8.1.

Quel que soit le support S, du noyau g factorisable sur X, on a $v(S) = v_X$

En d'autres termes, l'image par v d'un support S de g, ne dépend pas du support choisi.

Démonstration : Considérons $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

On a $v^{-1}(\lambda) = \{x \in X \mid a(x)b(x) \neq 0,\ v(x) = \lambda\} \subset X$.

Si $v^{-1}(\lambda) \neq \emptyset$ alors on a $v^{-1}(\lambda) \cap S \neq \emptyset$ pour tout support S de g.

En effet s'il n'en était pas ainsi S ne serait pas maximal (cf. remarque III.2.1. § III.2).

Soient alors S, et S' deux supports de g, $S \neq S'$, et $\alpha \in v(S)$.
On a donc $v^{-1}(\alpha) \neq \emptyset$ et donc $S' \cap v^{-1}(\alpha) \neq \emptyset$.
Autrement dit il existe $z_\alpha \in S'$ avec

$$v(z_\alpha) = \alpha .$$

α n'étant pas précisé dans v(S), on a donc $v(S) \subset v(S')$.
De façon similaire on a $v(S') \subset v(S)$ et donc

$$v(S) = v(S') \qquad S \neq S' \qquad (3)$$

D'autre part si $x \in X$ et $g(.,x) \neq 0$, il existe au moins un support S de g tel que $x \in S$ (cf. propriété 5 § II.1.4.), et donc $v(x) \in v(S)$ compte tenu de (3) on a donc quel que soit S

$$v(S) \supset v_X$$

Mais si $x \notin v_X$, alors $x \notin S$, $\forall S$ et finalement pour tout support S du noyau g on a

$$\boxed{v(S) = v_X}$$

———X———

III.8.2. - Détermination de l'espace hilbertien H, associé à g

Soit $S \subset X$ un support quelconque, mais fixé, de noyau factorisable g considéré.
On a $v_X = v(S)$.
Nous allons voir que la structure de la partie v_X dans $\mathbb{R}^+$, détermine la structure de l'espace hilbertien H associé à g.

III.8.2. 1er cas : $v_X = v(S) = (\alpha,\beta)$ intervalle de $\mathbb{R}^+$

D'après les résultats précédents (§ III.6.1. et III.6.2.) nous devons préciser parmi les fonctions f, $f \in \mathbb{R}^X$, celles qui satisfont les deux conditions suivantes :

1) $r_S^{-1}(f_{|S}) = f$ (r_S^{-1} est définie sur $\mathbb{R}^S$).

2) la quantité $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(k(x_i)-k(x_{i+1}))^2}{v(x_i)-v(x_{i+1})} + \frac{k^2(x_n)}{v(x_n)}$ $\quad (k = \frac{f}{a})$

est bornée indépendamment de n, et du choix des abscisses $x_i \in S$, $i = 1,2,\ldots,n$ avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Introduisons l'application T de $\mathbb{R}^S$ dans $\mathbb{R}^{(\alpha,\beta)}$:

$$T : f_{|S} \in \mathbb{R}^S \to F = Tf \in \mathbb{R}^{(\alpha,\beta)}$$

où

$$\boxed{F(t) = k(v^{-1}(t)) \qquad \forall t \in (\alpha,\beta)} \tag{1}$$

L'application F est parfaitement définie, puisque v est strictement décroissante sur S.

Pour $x_1 < x_2 < \ldots < x_n \qquad x_i \in S \qquad i = 1,2,\ldots,n$ (2)
on pose

$$v(x_i) = v_i \in (\alpha,\beta) \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{3}$$

et donc

$$v_n < v_{n-1} < \ldots < v_2 < v_1 \tag{4}$$

On a alors

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{[k(x_i)-k(x_{i+1})]^2}{v(x_i)-v(x_{i+1})} + \frac{k^2(x_n)}{v(x_n)} = \frac{F^2(v_n)}{v_n} + \sum_{i=n-1}^{1} \frac{(F(v_{i+1})-F(v_i))^2}{v_{i+1}-v_i} \tag{5}$$

Lorsque x parcourt S, v(x) parcourt (α,β). Pour $f \in \mathbb{R}^X$ on a donc l'équivalence (cf. théorème III.6.1. et propriété III.7) :

$$\boxed{f_{|S} \in H^S \rightleftarrows T(f_{|S}) \in H_{(\alpha,\beta)}} \tag{6}$$

et

$$\boxed{\|f_{|S}\|_{H^S} = \|T(f_{|S})\|_{H_{(\alpha,\beta)}}} \tag{7}$$

Dans l'hypothèse $a,b \in C^0(X)$ on a aussi $H \subset C^0(X)$ (théorème III.5) et nous énoncerons le <u>théorème essentiel suivant</u> :

Théorème III.8.2.

Si H est l'espace hilbertien associé à un noyau g, factorisable de X de composantes $a,b \in \mathcal{C}^0(X)$, vérifiant $v_X = (\alpha,\beta)$ intervalle de $\mathbb{R}^+$, on a explicitement si S est un support de g et si r_S^{-1} est l'application définie au § II.2.3.

1°) $H \subset \mathcal{C}^0(X)$

2°) $H = (T_o r_S)^{-1} H(\alpha,\beta)$

avec $(T^{-1}F)(x) = a(x)F(v(x)) \quad \forall x \in S$

$\forall F \in H(\alpha,\beta)$

3°) $(T_o r_S)^{-1}$ est une isométrie linéaire de $H(\alpha,\beta)$ sur H.

$\|F\|_{H(\alpha,\beta)} = \|f\|_H \qquad f = r_S^{-1} \circ T^{-1}(F).$

———X———

Remarque :

Si l'on ne fait pas l'hypothèse $a,b \in \mathcal{C}^0(X)$ on n'a plus la première conclusion : 1°) $H \subset \mathcal{C}^0(X)$ mais seulement 2°) et 3°) .

L'exemple

$X = [0,1]$

$a(x) = x \qquad x \leq \frac{1}{2}$

$\quad = 2x \qquad x > \frac{1}{2}$

$b(x) = 1 \qquad x \leq \frac{1}{2}$

$\quad = 2 \qquad x > \frac{1}{2}$

correspond à ce cas de figure ($v_X = [1,+\infty[$) .

———X———

EXEMPLES Nous développerons plus particulièrement le premier exemple, pour indiquer la marche à suivre de façon générale.

Exemple (1)

$$\begin{cases} X =]0,1[\\ a(x) = x \\ b(x) = 1+\rho x \qquad\qquad \rho \geq -1 \end{cases}$$

La condition $\rho \geq -1$ est une condition nécessaire et suffisante, pour que a,b soient les composantes d'un noyau reproduisant factorisable sur X. En effet on a ici $v(x) = \frac{1}{x} + \rho$, et v est strictement décroissante sur X et $v > 0 \overset{\rightarrow}{\leftarrow} \rho \geq -1$.
On a donc

$$S = X =]0,1[.$$

1°) $a,b \in C^0(X) \Rightarrow H \subset C^0(X)$

2°) Nous avons $\alpha = \inf\{v(x) \mid x \in X\} = 1+\rho \geq 0$
$= \sup\{v(x) \mid x \in X\} = +\infty$ et $v_X =]1+\rho,+\infty[$

Nous avons donc à déterminer

$$H = T^{-1}(H_{(1+\rho,+\infty)})$$

où

$$(T^{-1}F)(x) = a(x)\, F(v(x)) = xF(\rho+\frac{1}{x}) = f(x) \qquad x \in X, \; F \in H_{(1+\rho,+\infty)}$$

3°) Pour $F \in H_{(1+\rho,+\infty)}$ on a $F \in C^0_{]1+\rho,+\infty[}$ et $F' \in L^2_{(1+\rho,+\infty)}$
et donc $f \in C^0_{]0,1[}$ (nous le savions déjà d'après 1°)).

Mais on a aussi (cf. § I.6.2.)

$$\lim_{t\to\alpha} \frac{F^2(t)}{t} = \lim_{x\to 1} \frac{f^2(x)}{x(1+\rho x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f^2(x)}{1-x} = 0 \qquad \text{si } \rho = -1$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{F^2(t)}{t} = \lim_{x\to o} \frac{f^2(x)}{x(1+\rho x)} = \lim_{x\to o} \frac{f^2(x)}{x} = 0$$

On a donc plus précisément

$$f \in H \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^o_{[0,1]} \\ f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \quad \text{si } \rho \geq -1 \end{array} \right.$$

Ecrivons maintenant que $F' \in L^2_{(1+\rho,+\infty)}$
On a

$$F'(t) = \frac{k'(x)}{v'(x)} \quad \text{si} \quad v(x) = t \quad k(x) = \frac{f(x)}{a(x)} = \frac{f(x)}{x}$$

d'où

$$\int_{1+\rho}^{+\infty} F'^2(t)dt = -\int_o^1 \frac{k'^2(x)}{v'(x)}\,dx = \int_o^1 (f' - \frac{f}{x})^2 dx$$

et donc $f' - \frac{f}{x} \in L^2_{(0,1)}$, et on a comme expression de la norme de f dans H :

$$\|f\|^2_H = \|F\|^2_{H_{(1+\rho,+\infty)}} = \int_{1+\rho}^{+\infty} F'^2(t)dt + \frac{F^2(1+\rho)}{1+\rho}$$

$$= \int_o^1 (f' - \frac{f}{x})^2 dx + \frac{f^2(1)}{1+\rho} \qquad \text{si } \rho > -1$$

$$= \int_0^{+\infty} F'^2(t)dt = \int_0^1 (f' - \frac{f}{x})^2 dx \quad \text{si } \rho = -1$$

Or

$$\int_A^1 (f' - \frac{f}{x})^2 dx = \int_A^1 f'^2(x)dx + \int_A^1 \frac{f^2(x)}{x^2}dx - 2\int_A^1 \frac{ff'}{x}dx$$

$$= \int_A^1 f'^2(x)dx - \frac{f^2(x)}{x}\Big|_A^1$$

Pour $F \in H_{(1+\rho,+\infty)}$, donc $f \in H$ on a vu que $\lim_{x\to 0} \frac{f^2(x)}{x} = 0$ et donc $\int_0^1 (f' - \frac{f}{x})^2 dx = \int_0^1 f'^2(x)dx - f^2(1)$.

<u>En résumé</u> : Si $F \in H_{(1+\rho,+\infty)}$ et $f = T^{-1}(F)$, donc $f \in H$, on a

a) * $f \in C^o_{[0,1]}$

b) * $f(0) = 0$

c) * $f' \in L^2_{(0,1)}$

d) * $f(1) = 0$ si $\rho = -1$

e) * $\|f\|_H^2 = \int_0^1 f'^2(x)dx - \frac{\rho}{1+\rho} f^2(1)$ si $\rho > -1$

$= \int_0^1 f'^2(x)dx$ si $\rho = -1$

Réciproquement si f vérifie a,b,c,d il est évident que $T(f) = F$ appartient à $H_{(1+\rho,+\infty)}$. Il suffit en effet de voir que $F(t) = k(v^{-1}(t))$ est continue sur $]1+\rho,+\infty[$ et que $F' \in L^2_{(1+\rho,+\infty)}$. Ce dernier point découle directement de la remarque suivante : si $f \in C^o_{[0,1]}$ et vérifie $f(0) = 0$, $f' \in L^2_{(0,1)}$ alors $f' - \frac{f}{x} \in L^2_{(0,1)}$.

On a donc finalement : $H \subset C^o_{[0,1]}$ et explicitement :

$$H = \{f \in C^0_{[0,1]} \mid f(0)=0,\ f' \in L^2_{(0,1)},\ \|f\|^2_H = \int_0^1 f'^2(x)\,dx - \frac{\rho}{1+\rho} f^2(1)\} \quad \text{si } \rho > -1$$

$$= \{f \in C^0_{[0,1]} \mid f(0)=f(1)=0,\ f' \in L^2_{(0,1)},\ \|f\|^2_H = \int_0^1 f'^2(x)\,dx\} \quad \text{si } \rho = -1$$

Remarques

* On aurait pu directement prendre X = [0,1]. Dans ce cas nous aurions été amenés à considérer un support du noyau donné

$$S =]0,1] \quad \text{si} \quad \rho > -1$$
$$=]0,1[\quad \text{si} \quad \rho = -1$$

et nous aurions déterminé H_S pour obtenir H.
Nous aurions alors obtenu directement la condition f(0) = 0 (puisque a(0) = 0).

———X———

* Si $\rho = 0$ on retrouve l'espace $H_{(0,1)}$ (espace de type $H_{(\alpha,\beta)}$) (cf. aussi § I.6.2. espace H_3).

* Si $\rho = -1$ on retrouve l'espace H_4 (§.I.6.2.)

———X———

Exemple (2)

$$\begin{cases} X = [0,1] \\ a(x) = \operatorname{ch} x \\ b(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(1-x)}{\operatorname{sh} 1} \end{cases}$$

On vérifie que $v'(x) = -\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ est positive, strictement décroissante sur X et donc S = X.

a,b $\in C^0(X)$ et X compact $\Rightarrow H \hookrightarrow E = C^0_{[0,1]}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur X.

Ici $\alpha = v(1) > 0$ $\qquad \beta = v(0) < +\infty$

et

$$\int_\alpha^\beta F'^2(t)\,dt = \int_0^1 (f' - f \operatorname{th} x)^2\,dx \quad \text{si } F \in H_{(\alpha,\beta)} \quad f = T^{-1}(F)$$

Pour $f \in H$ on a $f \in C^0_{[0,1]}$ et donc également $f \in L^2_{(0,1)}$ et

$$\|f\|_H^2 = \|F\|^2_{H(\alpha,\beta)} = \int_\alpha^\beta F'^2(t)\,dt + \frac{F^2(\alpha)}{\alpha}$$

$$= \int_0^1 (f' - f \operatorname{th} x)^2\,dx + f^2(1) \operatorname{th} 1$$

$$= \int_0^1 (f'^2(x) + f^2(x))\,dx$$

Ainsi pour $F \in H_{(\alpha,\beta)}$ $\quad f = T^{-1}F \in H$ et vérifie

a) $\quad f \in L^2_{(0,1)}$

b) $\quad f' \in L^2_{(0,1)}$

c) $\quad \|f\|_H^2 = \int_0^1 (f^2(x) + f'^2(x))\,dx$

Réciproquement une fonction f vérifiant a,b est telle que
$Tf = F \in H_{(\alpha,\beta)}$ et finalement

$$H = \{f \in L^2_{(0,1)} \mid f' \in L^2_{(0,1)},\ \|f\|^2_H = \int_0^1 (f^2(x)+f'^2(x))dx\}$$

On récupère bien sûr l'espace de Sobolev $H^1_{(0,1)}$, déjà étudié au § I.6.2.

———X———

Exemple 3

$$\begin{cases} X = \mathbb{R} \\ a(x) = e^x \\ b(x) = \dfrac{e^{-x}}{2} \end{cases}$$

On a ici $v'(x) = -e^{-2x}$ et $S = X = \mathbb{R}$.

$$\alpha = \inf \{v(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = 0$$

$$\beta = \sup \{v(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = +\infty$$

On vérifie que les conditions pour que H soit inclus dans $C^0(\mathbb{R})$ sont vérifiées.
Pour $F \in H_{(0,\infty)}$ on a ici

$$\int_0^\infty F'^2(t)dt = -\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{k'^2(x)}{v'(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (f'-f)^2 dx < +\infty \text{ et } (f'-f) \in L^2_{(\mathbb{R})}$$

D'autre part $\lim_{t\to 0} \dfrac{F^2(t)}{t} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f^2(x)}{x} = 0$

et $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{F^2(t)}{t} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \dfrac{f^2(x)}{x} = 0$

et alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f'-f)^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (f'^2(x)+f^2(x))dx$$

et donc $f, f' \in L^2_{(\mathbb{R})}$

Réciproquement si $f,f' \in L^2_{(\mathbb{R})}$, $F = Tf \in H_{(0,\infty)}$ et on obtient

$$H = \{f \mid f,f' \in L^2_{(\mathbb{R})} \ , \ \|f\|^2_H = \int_{-\infty}^{+\infty} (f'^2(x)+f^2(x))dx\}$$

On récupère l'espace de Sobolev $H^1_{(\mathbb{R})}$ (cf. § I.6.2.)

———X———

Exemple 4

$$\begin{cases} X = [0,\frac{\pi}{2}] \\ a(x) = \sin x \\ b(x) = \cos x \end{cases}$$

On vérifie que $H \subset C^0(X)$ et $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad \forall f \in H$.

Ici $\alpha = 0$ et $\beta = +\infty$

et si $F \in H_{(0,\infty)}$ $f(x) = (T^{-1}F)(x) = \sin x \, F(\frac{1}{\operatorname{tg} x}) \quad x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

et

$$\int_0^{\infty} F'^2(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f'-f \cot g x)^2 dx$$

On aura ici

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^2(x)}{\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f^2(x)}{\cos x} = 0$$

et conséquemment

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f'-f\cot gx)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f'^2(x)-f^2(x))dx$$

Ainsi $f = T^{-1}(F)$ vérifie

a) $f, f' \in L^2_{(0,\frac{\pi}{2})}$

b) $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$

Réciproquement si f vérifie a,b on a $Tf = F \in H_{(0,\infty)}$ et

$$H = \{f \mid f,f' \in L^2_{(0,\frac{\pi}{2})},\ f(0) = f(\tfrac{\pi}{2}) = 0,\ \|f\|_H^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f'^2(x)-f^2(x))dx\}$$

Remarque - J.F. DUCATEAU avait déjà envisagé cet espace en étudiant des "conditions pour qu'un procédé d'interpolation provienne de la minimisation d'une fonction hilbertienne" (cf. [19]).

Dans ce contexte H apparaissait comme "l'ensemble des fonctions u, telles que $h(u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [u'^2(t)-u^2(t)]dt < +\infty$, et qui sont limites simples de combinaisons linéaires de fonctions de la forme

si $t \in [0,x]$ alors $\sin x \cos t$

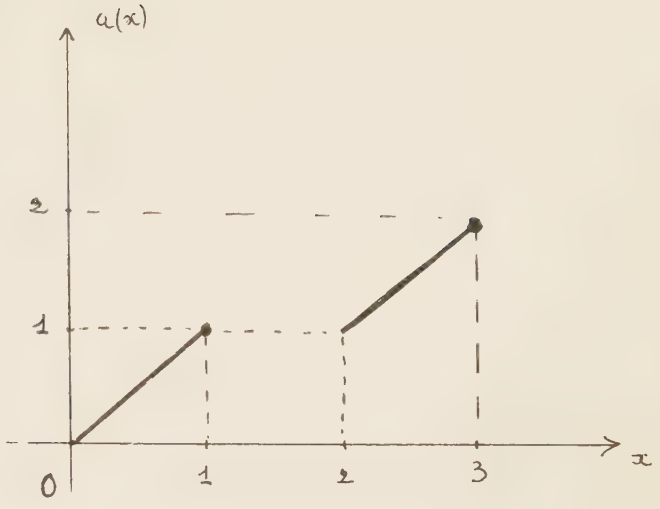
sinon $\sin t \cos x$ $\qquad x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ ".

On voit que notre explicitation est beaucoup plus précise. D'autre part les combinaisons linéaires envisagées convergent uniformément vers u sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

———X———

Exemple 5

$$\begin{cases} X = [0,1] \cup]2,3] \\ a(x) = x \quad a \le x \le 1 \\ \qquad = x-1 \quad 2 \le x \le 3 \\ b(x) = 1 \end{cases}$$



On obtient ici

$$H = \{f \in \mathcal{C}^0(\bar{X}) \mid f(0) = 0,\ f(1) = f(2),\ f' \in L^2_{(X)}\ ,$$

$$\|f\|_H^2 = \int_0^1 f'^2(x)\,dx + \int_2^3 f'^2(x)\,dx \ \}$$

———X———

Remarque

Si nous modifions ce dernier exemple en prenant

$\tilde{X} = [0,3]$ et en complétant les définitions de a, b par

$$\begin{cases} a(x) = 1 \quad 1 \le x \le 2 \\ b(x) = 1 \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

alors nous obtiendrons :

$$\tilde{H} = \{f \in \mathcal{C}^0_{[0,3]} \mid f(0) = 0,\ f(x) = f(1)\ \forall x \in [1,2],\ f' \in L^2_X\ ,$$

$$\|f\|_H^2 = \int_0^3 f'^2(x)\,dx\}.$$

Ceci illustre nos propos du § II.2. Les espaces H et $\tilde{H}$ sont isométriques, leurs supports pouvant être pris identiques

$$S =]0,1] \cup]2,3]$$

L'application r_S^{-1}, lorsque nous considérons $\tilde{H}$, est telle que

$$\boxed{r_S^{-1}(f_{|S}) = f} \rightleftarrows \boxed{f(x) = f(1) \quad x \in [1,2]}$$

———X———

Exemple 6

Généralisant l'exemple 2

On considère pour X un intervalle fermé borné de IR. On peut toujours se ramener à X = [0,1].
On suppose que les composantes a,b de noyau g vérifient

1) $a,b \in C^2(X)$, $a(x)b(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$

2) $v' = (\frac{b}{a})'$ est strictement négative sur X.

Nous allons déterminer l'espace hilbertien H associé à un tel noyau reproduisant. Tout d'abord toutes les conditions sont requises pour appliquer le théorème III.8.2. On a

$$\alpha = v(1) > 0 \qquad \beta = v(0) < +\infty \qquad \beta > \alpha$$

et

$$H = T^{-1}(H_{(\alpha,\beta)})$$

avec

$$(T^{-1}(F))(x) = a(x)F(v(x)) \qquad \text{si } x \in X, \quad F \in H_{(\alpha,\beta)}$$

Etudions les propriétés de $f = T^{-1}F$, $f \in H$, $F \in H_{(\alpha,\beta)}$

1°) $f \in C^0_{(X)}$ (cf. théorème III.5) et donc $f \in L^2_{(X)}$

2°) On a $\|f\|_H^2 = \|F'\|^2_{L^2_{(\alpha,\beta)}} + \frac{F^2(\alpha)}{\alpha} < +\infty$ (1)

Or $F(t) = k(v^{-1}(t)) \qquad k = \frac{f}{a}$, $v = \frac{b}{a}$

et

$$F'(t) = \frac{k'(x)}{v'(x)} \quad \text{si } v(x) = t$$

d'où

$$\int_\alpha^\beta F'^2(t)dt = -\int_0^1 \frac{k'^2(x)}{v'(x)}\,dx \qquad (2)$$

et

$$\|f\|_H^2 = -\int_0^1 \frac{k'^2(x)}{v'(x)}\,dx + \frac{f^2(1)}{a(1)b(1)} < +\infty \qquad (3)$$

$$k' = \left(\frac{f}{a}\right)' = \frac{f'a-a'f}{a^2}, \qquad v' = \frac{b'a-a'b}{a^2}$$

et donc

$$-\int_0^1 \frac{k'^2(x)}{v'(x)}\,dx = \int_0^1 \frac{\left(f'-\frac{a'}{a}f\right)^2}{a'b-b'a}(x)dx \qquad (4)$$

Notons

$$\boxed{p = \frac{1}{a'b-b'a}} \qquad (5)$$

On a d'après 1), 2) :

$$p \in C^0(X), \quad p(x) \geq p_0 > 0 \quad \forall x \in X \qquad (6)$$

et (4) s'écrit :

$$-\int_X \frac{k'^2(x)}{v'(x)}dx = \int_0^1 pf'^2dx + \int_0^1 p\,\frac{a'^2}{a^2}f^2dx - 2\int_0^1 p\,\frac{a'}{a}\,ff'dx \qquad (7)$$

En intégrant par parties le 3ème terme de (7) on obtient

$$-\int_X \frac{k'^2(x)}{v'(x)} = \int_0^1 pf'^2dx + \int_0^1 \left[p\,\frac{a'^2}{a^2} + \left(p\,\frac{a'}{a}\right)'\right]f^2dx - p\,\frac{a'}{a}\,f^2\Big|_0^1 \qquad (8)$$

Posons $q = p\,\frac{a'^2}{a^2} + \left(p\,\frac{a'}{a}\right)'$. On peut encore écrire

$$\boxed{q = p^2(a'b''-a''b')} \tag{9}$$

et donc $q \in C^0(X)$.

On a alors d'après (3) (8) (9)

$$\|f\|_H^2 = \int_0^1 (pf'^2+qf^2)(x)dx+\frac{f^2(1)}{a(1)b(1)} - p\frac{a'}{a} f^2\Big|_0^1 < +\infty \tag{10}$$

On a donc nécessairement compte tenu de (6)

$$f' \in L^2_{(0,1)}$$

D'autre part d'après (5) : $pa'b-pb'a = 1$

d'où

$$\frac{f^2(1)}{a(1)b(1)} - (\frac{pa'}{a}f^2)(1)+(\frac{pa'}{a}f^2)(0) = (\frac{pa'}{a}f^2)(0)-(\frac{pb'}{b}f^2)(1)$$

et finalement

$$\boxed{\|f\|_H^2 = \int_0^1 (pf'^2+qf^2)(x)dx+(\frac{pa'}{a}f^2)(0)-(\frac{pb'}{a}f^2)(1)} \tag{11}$$

En résumé si $f \in H$ on a

* $f \in L^2(X)$

* $f' \in L^2(X)$

et $\|f\|_H^2$ est donnée par (11).

Réciproquement considérons f telle que $f,f' \in L^2(X)$. D'après le théorème de Sobolev (cf [31]) on a alors $f \in C^0(X)$. D'autre part d'après les calculs précédents on a alors :

$$F = Tf \in C^{\circ}_{(\alpha,\beta)} \qquad \text{c'est-à-dire } Tf \in H_{(\alpha,\beta)}$$
$$F' \in L^2_{(\alpha,\beta)}$$

et donc $f \in H$. On a donc montré que

$$H = \{f \in L^2(X) \mid f' \in L^2(X) \ ;$$
$$\|f\|_H^2 = \int_X (pf'^2+qf^2)(x)\,dx+(\frac{pa'}{a}f^2)(0)-(\frac{pb'}{b}f^2)(1)\}$$

avec p,q donnés par (5) et (9).

Nous énoncerons la

Propriété

Si les composantes a,b de g noyau factorisable sur X = [0,1] vérifient

1°) $a,b \in C^2(X)$, $a(x)b(x) \neq 0 \quad x \in X$

2°) $v' = (\frac{b}{a})'$ est strictement négative sur X

alors on a explicitement comme expression de l'espace H associé à g

$$H = \{f \mid f,f' \in L^2(X) \ ;$$
$$\|f\|_H^2 = \int_X (pf'^2+qf^2)(x)\,dx+(\frac{pa'}{a}f^2)(0)-(\frac{pb'}{b}f^2)(1)\}$$

avec $p = 1/(a'b-b'a)$; $q = p^2(a'b''-a''b')$

L'exemple 6) généralise bien l'exemple 2).

En effet, avec $\left\| \begin{array}{l} a(x) = ch x \\ b(x) = \dfrac{ch(1-x)}{sh1} \end{array} \right.$

on a $v'(x) = -\dfrac{1}{ch^2(x)} \leq \dfrac{-1}{ch^2 1} \quad \forall x \in [0,1]$

et

$$p(x) = q(x) = 1$$

et on retrouve bien l'expression déjà trouvée pour H ;

$$H = \{\varphi \mid \varphi, \varphi' \in L^2(X), \quad \|\varphi\|_H^2 = \int_0^1 (\varphi'^2 + \varphi^2)(x)dx\} = H^1_{(0,1)}$$

———X———

Remarque

De façon générale, les calculs précédents peuvent toujours être développés de façon formelle dès que $a, b \in C^2(X)$.
L'expression de la norme de f dans H s'exprime alors toujours par :

$$\|f\|_H^2 = \int_X pf'^2 + qf^2 + \frac{pa'}{a} f^2(0) - \frac{pb'}{b} f^2(1)$$

On peut vérifier ainsi que dans tous les exemples (1)) (5) l'expression précédente coïncide avec celle déjà trouvée.

———X———

III.8.2. 2ème cas $v_X = \bigcup\!\!\!\bigcup_{\substack{i\in I\\ I\subset\mathbb{N}}} (\alpha_i,\beta_i)$ $\qquad \beta_i < \alpha_{i+1}$, $i, i+1 \in I$

A la partition de v_X, correspond la partition de X : $X = \bigcup\!\!\!\bigcup_{i\in I} X_i$ telle que $v_{X_i} = (\alpha_i,\beta_i)$, $i \in I$.

Considérons d'abors le cas $I = \{1,2,\ldots,N\}$

A X_i on peut associer l'espace hilbertien $H_i \subset \mathbb{R}^{X_i}$ de noyau $g_i = g_{|X_i}$.
On a alors clairement (cf. théorème III.7)

$$H = \{f \in \mathbb{R}^X \mid f_{|X_i} \in H_i \qquad i = 1,2,\ldots,N \text{ avec}$$

$$\|f\|_H^2 = \sum_{i=1}^{N} \int_{\lambda_i}^{\mu_i} \frac{k'^2(x)}{v'(x)}dx + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{[k(\mu_i)-k(\lambda_{i+1})]^2}{v(\mu_i)-v(\lambda_{i+1})} + \frac{k^2(\mu_N)}{v(\mu_N)}\}$$

où $\lambda_i = \inf(x \mid x \in X_i)$ $\quad \mu_i = \sup\{x \mid x \in X_i\}$

Si $I = \mathbb{N}$, il faudra ajouter les conditions

$$\lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{\lambda_i}^{\mu_i} \frac{k'^2(x)}{v'(x)}dx \right) < +\infty$$

$$\lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{[k(\mu_i)-k(\lambda_{i+1})]^2}{v(\mu_i)-v(\lambda_{i+1})} + \frac{k^2(\mu_N)}{v(\mu_N)} \right) < +\infty$$

Remarque

Si $\beta_i = \alpha_{i+1}$ $\forall i, i+1 \in I$, les termes relatifs aux "sauts" de la fonction v disparaissent et la norme de f est une expression de type intégrale.

Si au contraire $\beta_i = \alpha_i$ $i \in I$ les quantités $\int_{\lambda_i}^{\mu_i} \frac{k'^2(x)}{v'(x)}\,dx$ disparaissent et l'expression de $\|f\|_H^2$ est une série. Ce cas correspond à un espace de fonctions isométrique à un espace hilbertien de suites.

———X———

EXEMPLES

Exemple 1

$$\begin{cases} X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [2n,2n+1] \\ a(x) = x \\ b(x) = 1 \end{cases}$$

On obtient

$$H = \{f \in C^0(X) \mid f(0) = 0,\ f' \in L^2(X),\ \sum_{n=1}^{\infty} [f(2n)-f(2n-1)]^2 < +\infty$$

avec

$$\|f\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{2n-2}^{2n-1} f'^2(x)\,dx + [f(2n)-f(2n-1)]^2\right)\}'$$

X

Exemple 2

$$\begin{cases} X = \bigcup [2n,2n+1] \\ a(x) = x-n \qquad x \in [2n,2n+1] \quad n \in \mathbb{N} \\ b(x) = 1 \end{cases}$$

On a choisi ici a(x) de sorte que $v_X =]0,+\infty[$: la fonction v n'a pas de sauts et alors

$$H = \{f \in C^0(X) \mid f' \in L^2(X),\ f(0) = 0,\ f(2n) = f(2n-1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\|f\|_H^2 = \int_X f'^2(x)\,dx \ .$$

(les conditions $f(2n) = f(2n-1)$ $n \in \mathbb{N}$ proviennent de

$v(2n) = v(2n-1)$, $n \in \mathbb{N}$)

X

Exemple 3

$$\begin{cases} X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n,n+1[= \mathbb{R} - \mathbb{N} . \\ a(x) = n+1 \qquad x \in]n,n+1[\\ b(x) = 1 \end{cases}$$

Ici $v(x) = cte = \frac{1}{n+1} \quad x \in]n,n+1[$

Un support de g est réduit à une suite quelconque $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_n \in]n,n+1[, \quad n \in \mathbb{N}$.

On récupère ici un espace hilbertien de fonctions isométriques à un espace de suites :

$$H = \{f \in \mathbb{R}^X \mid f(x) = f(x_n),\ x \in]n,n+1[,\ n \in \mathbb{N} \ ;$$

$$\sum_0^\infty [f(x_{n+1})-f(x_n)]^2 < +\infty$$

$$\|f\|_H^2 = f^2(x_o) + \sum_{n=1}^{\infty} (f(x_{n+1})-f(x_n))^2\}$$

On a $H \subset C^o(X)$.

Remarque

En modifiant l'exemple ci-dessus comme suit :

$$\begin{cases} X = \mathbb{R}^+ \\ a(x) = n+1 \qquad x \in [n,n+1[\qquad n \in \mathbb{N} \\ b(x) = 1 \end{cases}$$

On obtient formellement la même expression pour H, mais on n'a plus $H \subset C^o(X) = C^o(\mathbb{R}^+)$ (fonctions en paliers)

X

CHAPITRE IV

APPROXIMATION DE FONCTIONNELLES LINEAIRES
FORMULES OPTIMALES

IV.1 - INTRODUCTION

Soit $H \subset \mathbb{R}^X$, un espace hilbertien de fonctions admettant un noyau reproduisant g. On cherche à approximer une fonctionnelle ℓ, linéaire continue sur H, par une combinaison d'au plus N fonctionnelles de Dirac.

Posons $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in X^N \qquad A = (A_1, A_2, \ldots, A_N) \in \mathbb{R}^N$

Existe-t-il $(x^*, A^*) \in D = X^N \times \mathbb{R}^N$ tel que
$\left\| \ell - \sum_{i=1}^{N} A_i^* \delta_{x_i^*} \right\|_{H'}^2 = \min_{(x,A)\in D} \left\| \ell - \sum_{i=1}^{N} A_i \delta_{x_i} \right\|_{H'}^2$?

(P1)

Ce problème est très intéressant, dans la mesure où l'on pourra, si la réponse est affirmative, conclure à l'existence de meilleurs approximants. Si ℓ est la fonctionnelle intégrale -par exemple : $\ell(\varphi) = \int_X \varphi(t)dt$, nous obtiendrons ainsi des formules d'intégration optimales.

On peut dire qu'il s'agit de déterminer s'il existe des formules d'approximation, optimales au sens de SARD [35], avec noeuds et poids variables.

Ce problème n'est ni linéaire, ni convexe. Son étude demeure encore embryonnaire aujourd'hui, sauf dans le domaine d'espaces hilbertiens de fonctions analytiques (cf. [6], [15], [34]).

———X———

Les résultats importants de ce chapitre concerneront surtout les espaces hilbertiens à noyaux reproduisants factorisables. D'autres sont valables dans un contexte plus général (§ IV.7 en particulier).

———X———

IV.2 - AUTRES FORMULATIONS DU PROBLEME DE MEILLEURE APPROXIMATION

Nous allons tout d'abord préciser le théorème d'optimisation posé. Nous travaillerons en fait dans l'espace H (et non dans son dual H') en introduisant l'isomorphisme canonique Λ de H dans H' :

$$\Lambda : H \to H'$$

On a par définition du noyau reproduisant :

$$g(.,\alpha) = \Lambda^{-1}(\delta_\alpha)$$

On pose

$$h = \Lambda^{-1}(\ell)$$

Pour (x,A) dans D on note alors

$$\Psi^2(h;x,A) = \|h - \sum_{i=1}^{N} A_i g(.,x_i)\|_H^2 \qquad (1)$$

et le problème (P1) se formule de manière équivalente :

Existe-t-il (x^*,A^*) dans $D = X^N \times \mathbb{R}^N$ tel que
$\Psi^2(h;x^*,A^*) = \min_{(x,A)\in D} \Psi^2(h;x,A)$?

(P2)

On peut encore modifier le problème (P2) en éliminant la variable A : Posons :

$$\Phi^2(h;x) = \min_{A\in\mathbb{R}^N} \|h - \sum_{i=1}^{N} A_i g(.,x_i)\|_H^2 \qquad (2)$$

Il s'agit bien d'un minimum : $\Phi^2(h;x)$ représente le carré de la distance de h à la variété linéaire engendrée par $(g(.,x_i)\ i=1,2,\ldots,N)$ et on a

$$\inf_{(x,A)\in D} \Psi^2(h;x,A) = \inf_{x\in X^N} \Phi^2(h;x) \qquad (3)$$

et le problème (P2) admet la formulation suivante :

Existe-t-il x^* dans X^N tel que $\Phi^2(h;x^*) = \min_{x \in X^N} \Phi^2(h;x)$?	(P3)

IV.3 - EXPLICITATION DE LA FONCTION $x \in X^N \to \Phi^2(h;x) \in \mathbb{R}^+$

Notons $V = L(g(.,x_1),\ldots,g(.,x_N))$. On a $\dim(V) = p \leq N$.

Nous excluons le cas où $V = \{0\}$ pour lequel $\Phi^2(h;x) = \|h\|_H^2$, et on suppose donc que l'on a $1 \leq p \leq N$.

Soit $\{t_1,t_2,\ldots,t_p\} \subset \{x_1,x_2,\ldots,x_N\}$ tel que $V = L(g(.,t_1),\ldots,g(.,t_p))$
On a

$$\Phi^2(h;x) = \min_{B\in\mathbb{R}^p} \|h - \sum_{i=1}^{p} B_i\, g(.,t_i)\|_H^2 \qquad (4)$$

Les poids réalisant le minimum dans (4) sont obtenus en écrivant les p relations d'orthogonalité :

$$(h - \sum_{i=1}^{p} B_i\, g(.,t_i) \mid g(.,t_j)) = 0 \qquad j=1,2,\ldots,p \qquad (5)$$

Si on pose $G = (g(t_i,t_j))_{i,j=1,2,\ldots,p}$, $G \in M_p(\mathbb{R})$

$$B = \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_p \end{vmatrix} \qquad \bar{h} = \begin{vmatrix} h(t_1) \\ h(t_2) \\ \vdots \\ h(t_p) \end{vmatrix} \qquad ; \; B, \bar{h} \in \mathbb{R}^p$$

On tire de (5)

$$\boxed{B = G^{-1}\bar{h}} \tag{6}$$

Posons encore $G^{-1} = (\beta_{ij})$ (7)

On a d'après (6) :

$$B_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} h(t_j) = (h \mid \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} g(.,t_j)) \qquad i = 1,2,\ldots,p$$

Soit : $\left\| \begin{array}{l} B_i = (h \mid u_i) \\ \\ u_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} g(.,t_j) \end{array} \right.$ $\quad i = 1,2,\ldots,p$ (8)

Or

$$(u_i \mid g(.,t_k)) = \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} g(t_k,t_j) = \delta_i^k \qquad i,k=1,2,\ldots,p \tag{9}$$

autrement dit $(u_1,u_2,\ldots,u_p)$ est le système biorthogonal dans V, au système $(g(.,t_1),\ldots,g(.,t_p))$ et nous pouvons énoncer :

Propriété IV.3

La projection orthogonale $P_h = \sum_{i=1}^{p} B_i g(.,t_i)$ de h sur la variété linéaire V de dimension p, engendrée par $(g(.,t_i)_{i=1,2,\ldots,p})$ est telle que

$$B_i = (h \mid u_i) \qquad i = 1,2,\ldots,p$$

les u_i étant déterminés de manière unique par les relations :

$$\left\| \begin{array}{l} u_i \in V \\ \\ (u_i | g(.,t_j)) = u_i(t_j) = \delta_i^j \end{array} \right. \qquad i,j = 1,2,\ldots,p.$$

et on a :

$$\|h-P_h\|^2 = \Phi^2(h;x) = \|h\|^2 - \sum_{i=1}^{p} (h|u_i)(h|g(.,t_i)) \qquad \text{ou encore}$$

$$\Phi^2(h;x) = \|h\|^2 - \bar{h}^t G^{-1} \bar{h}$$

———X———

Remarque

$u_1,u_2,\ldots,u_p$ sont les "splines de base", construites sur les noeuds $t_1,t_2,\ldots,t_p$ et relatives à l'opérateur identité de H dans lui-même (cf. [2]).

———X———

IV.4 - UNE CONDITION SUFFISANTE D'EXISTENCE D'UNE APPROXIMATION OPTIMALE

On utilise la formulation 2 au problème. On a le :

Théorème IV.4

Si X est compact,

si l'application $\alpha \in X \to g(.,\alpha) \in \mathbf{H}$ est continue sur X et s'il existe une constante positive M, ne dépendant que de N et h, telle que, quel que soit l'entier p, $1 \leq p \leq N$, et quel que soit le système libre $(g(.,t_1), g(.,t_2),\ldots,g(.,t_p))$, $t_i \in X \qquad i = 1,2,\ldots,p$ on a

$$|\ell(u_i)| = |(h|u_i)| \leq M \qquad i = 1,2,\ldots,p$$

alors il existe un élément (x^*,A^*) au moins, $(x^*,A^*) \in X^N \times \mathbb{R}^N$ tel que

$$\Psi^2(h;x^*,A^*) = \min_{(x,A)\in X^N\times \mathbb{R}^N} \Psi^2(h;x,A)$$

Démonstration

La continuité de l'application $\alpha \to g(.,\alpha)$ de X dans H entraîne la continuité de l'application

$$(x,A) \in D \to \Psi^2(h;x,A) \in \mathbb{R}^+.$$

Soit $(x,A) \in D$ et $\sum_{i=1}^{p} B_i g(.,t_i)$, la projection orthogonale de h sur $\mathcal{L}g(.,x_i) \mid i = 1,2,\ldots,n)$, $0 \leq p \leq N$. Quels que soient $t_{p+1},\ldots,t_N \in X$ le point $(\tilde{x},\tilde{A}) = (t_1,\ldots,t_p,t_{p+1},\ldots t_N ; B_1,\ldots,B_p,0,\ldots,0)$ vérifie

$$\Phi^2(h;x) = \Psi^2(h;\tilde{x},\tilde{A}) \leq \Psi^2(h;x,A)$$

mais $|\tilde{A}_i| = |(h|u_i)| \leq M$ par hypothèse. $\quad i = 1,2,\ldots,p$

et $\tilde{A}_i = 0 \qquad i = p+1,\ldots,N.$

A l'élément (x,A) de D, on peut donc toujours faire correspondre un élément $(\tilde{x},\tilde{A})$ de $X^N * [-M,+M]^N$ pour lequel

$$\Psi^2(h;\tilde{x},\tilde{A}) \leq \Psi^2(h;x,A)$$

On peut donc dans la recherche du minimum se restreindre au compact $X^N * [-M,+M]^N$, et de la continuité de l'application $\Psi^2(h;x,A)$ sur D découle le résultat annoncé.

———X———

IV.5 - APPLICATIONS

Nous allons étudier dans les espaces $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$, $\mathcal{H}_4$ (notés H_i i=1,2,3,4 au § I.6.2), l'existence d'une meilleure approximation de la fonctionnelle intégrale.
Dans ces quatre espaces, on peut vérifier que la "fonctionnelle intégrale"

$$\varphi \to \int_X \varphi(t)dt$$

est linéaire continue.

Nous allons simultanément évaluer pour chacun de ces espaces :

(1°) les splines de base u_i $i = 1,2,\ldots,p$ relatives à un système libre $g(.,t_1),\ldots g(.,t_p))$

(2°) Le représentant h de la fonctionnelle intégrale dans $\mathcal{H}_i$

(3°) La projection $P_h = \sum_{i=1}^{p} B_i g.,t_i)$ de h sur $L(g(.,t_1),\ldots,g(.,t_p))$

(4°) La quantité $\Phi^2(h;x)$

En appliquant les résultats du paragraphe précédent, nous démontrerons alors l'existence de formules optimales, que nous expliciterons entièrement.

Nous allons étudier dans le détail tous les points précédents dans le cas de $\mathcal{H}_1 = H^1_{(0,1)}$, puis sans faire tous les calculs, nous donnerons sous forme de tableaux, les résultats pour les quatre espaces considérés.

1°) Problème aux limites générant le noyau reproduisant de $H^1_{(0,1)}$

$$\mathcal{H}_1 = H^1_{(0,1)} = \{\varphi \in C^0_{[0,1]} \mid \varphi' \in L^2_{(0,1)} \ , \ (\varphi|\Psi) = \int_0^1 (\varphi\Psi+\varphi'\Psi')(x)dx$$

En écrivant que g est le noyau reproduisant de $\mathcal{H}_1$ on montre (cf. [30]) que le représentant $g(.,\alpha)$ dans H de la fonctionnelle de Dirac δ_α est solution du problème aux limites :

$$\left\| \begin{array}{l} -y''+y = \delta_\alpha \\ \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{array} \right.$$

La résolution de ce système donne immédiatement comme expression du noyau reproduisant de $\mathcal{H}_1$ (noyau de type factorisable)

$$g(x,\alpha) = \left\| \begin{array}{ll} \dfrac{\mathrm{ch}x \ \mathrm{ch}(1-\alpha)}{\mathrm{sh}1} & 0 \leq x \leq \alpha \\ \\ \dfrac{\mathrm{ch}\alpha \mathrm{ch}(1-x)}{\mathrm{sh}1} & \alpha \leq x \leq 1 \end{array} \right.$$

En dehors de $x = \alpha$, la fonction $g(.,\alpha)$ satisfait donc l'équation différentielle homogène $-y''+y = 0$.

2°) Splines de base associées à un p-uplet $t_1, t_2, \ldots, t_p$

De la structure même du noyau g de $\mathcal{H}_1$, il découle qu'à un p-uplet d'abscisses $t_1, t_2, \ldots, t_p$ toutes distinctes dans $[0,1]$ correspond un système libre $(g(.,t_1), \ldots, g(.,t_p))$ et inversement ($S = X = [0,1]$)

Soit $V = L(g(.,t_1),\ldots,g(.,t_p))$ et supposons

$$0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_p \leq 1$$

Les splines de base u_i $i = 1,2,\ldots,p$ sont déterminées (cf. § IV.3) par les conditions :

$$\begin{cases} u_i \in V \\ \\ u_i(t_j) = \delta_i^j \end{cases} \qquad i,j = 1,2,\ldots,p$$

La première condition signifie que l'on a

$$\begin{cases} -u_i'' + u_i = 0 & \text{en dehors de } \{t_1,t_2,\ldots,t_p\} \\ \\ u_i'(0) = u_i'(1) = 0 \end{cases}$$

la seconde signifie $i=1,2,\ldots,p$

$$\begin{cases} u_i(t_i) = 1 \\ \\ u_i(t_j) = 0 & j = 1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,p \end{cases}$$

Il vient immédiatemment :

$$u_1(x) = \begin{cases} \dfrac{ch\,x}{ch\,t_1} & 0 \leq x \leq t_1 \\ \\ \dfrac{sh(x-t_2)}{sh(t_1-t_2)} & t_1 \leq x \leq t_2 \\ \\ 0 & t_2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$u_i(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq t_{i-1} \\ \dfrac{sh(x-t_{i-1})}{sh(t_i-t_{i-1})} & t_{i-1} \leq x \leq t_i \\ \dfrac{sh(x-t_{i+1})}{sh(t_i-t_{i+1})} & t_i \leq x \leq t_{i+1} \\ 0 & t_{i+1} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad i=2,3,\ldots,p-1.$$

$$u_p(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq t_{p-1} \\ \dfrac{sh(x-t_{p-1})}{sh(t_p-t_{p-1})} & t_{p-1} \leq x \leq t_p \\ \dfrac{ch(1-x)}{ch(1-t_p)} & t_p \leq x \leq 1 \end{cases}$$

3°) Représentant h de la fonctionnelle intégrale dans $\mathcal{H}_1$

On a $\int_0^1 \varphi(t)dt = \langle 1,\varphi\rangle$ et on a trivialement $h \equiv 1$.

De façon plus générale le représentant h de la fonctionnelle

$$\varphi \to \int_0^1 z(t)\varphi(t)dt \qquad \text{pour } z \in L^2_{(0,1)}$$

vérifie (cf. [27])

$$\left\| \begin{array}{l} -h''+h = z \\ \\ h'(0) = h'(1) = 0 \end{array} \right.$$

et on a

$$h(x) = \int_0^1 g(x,t)z(t)dt$$

4°) Les hypothèses du théorème IV.4 sont vérifiées

En effet $X = [0,1]$; et on a (cf. § I.6.2.)

$$\mathcal{H}_1 \subset C^0_{[0,1]}.$$

On a donc si $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$, $\alpha \in [0,1]$

* d'une part $(g(.,\alpha_n)|\varphi) = \varphi(\alpha_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(\alpha) = (g(.,\alpha)|\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_1$

  d'après la continuité de φ.

  Donc $g(.,\alpha_n)$ converge faiblement vers $g(.,\alpha)$

* d'autre part on a $g(x,x) = a(x)b(x)$ avec $a,b \in C^0(X)$
  et donc

$$\|g(.,\alpha_n)\|^2 = a(\alpha_n)b(\alpha_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} a(\alpha)b(\alpha) = \|g(.,\alpha)\|^2$$

  et $g(.,\alpha_n)$ converge en norme vers $g(.,\alpha)$.

Il y a donc convergence faible et convergence en norme, donc convergence forte de $g(.,\alpha_n)$ vers $g(.,\alpha)$ lorsque n tend vers l'infini.
Donc $\alpha \to g(.,\alpha)$ est continue de X dans $\mathcal{H}_1$.

Enfin puisque $|u_i(x)| < 1 \quad i = 1,2,\ldots,p$
on a

$$|(h|u_i)| = \left| \int_0^1 u_i(x)dx \right| \leq 1 \qquad i = 1,2,\ldots,p$$

et les hypothèses du théorème IV.4 sont donc vérifiées.

5°) Calcul de $\Phi^2(h;x) = \| \sum_{i=1}^{p} B_i g(.,t_i) - h \|^2_{\mathcal{H}_1}$

Pour déterminer la ou les formules optimales, nous devons calculer la quantité $\Phi^2(h;x)$. En utilisant l'une ou l'autre des expressions de $\Phi^2(h;x)$ (propriété IV.3) on obtient :

$$\Phi^2(h;x) = 1 - \sum_{i=1}^{p} B_i$$

avec $B_i = (h|u_i) = \int_0^1 u_i(x)dx$

soit

$$\left|\begin{array}{l} B_1 = th(t_1) + th\left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right) \\ B_i = th\left(\frac{t_i - t_{i-1}}{2}\right) + th\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right) \qquad i = 2,3,\ldots,p-1. \\ B_p = th\left(\frac{t_p - t_{p-1}}{2}\right) + th(1 - t_p) \end{array}\right.$$

(Rappelons que $t_1, t_2, \ldots, t_p$ sont les absicsses distinctes et ordonnées que l'on peut extraire du N-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$)
et on a

$$\Phi^2(h;x) = 1 - th(t_1) + 2 \sum_{i=2}^{p-1} th\left(\frac{t_i - t_{i-1}}{2}\right) + th(1 - t_p)$$

Lorsque x parcourt $[0,1]^N$, p peut varier de 1 à N et il est clair que si $\Phi^2(h;x)$ est minimum, alors nécessairement $p = N$, c'est-à-dire que les abscisses sont toutes distinctes.

6°) Détermination des formules d'intégration optimales dans $\mathcal{H}_1$

D'après ce qui précède, cela revient à déterminer les abscisses x_i $i = 1,2,\ldots,N$ de $[0,1]$ $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_N \leq 1$ pour lesquelles la quantité

$$Q_N^2 = \mathrm{th}\, x_1 + 2 \sum_{i=2}^{N-1} \mathrm{th}\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right) + \mathrm{th}(1-x_N) \qquad (Q_N = Q_N(x_1, x_2, \ldots, x_N))$$

est maximum. Nous savons à priori qu'un tel maximum a lieu pour des abscisses toutes distinctes. Les noeuds optimaux s'obtiennent très simplement en écrivant les conditions nécessaires d'extrémalité de Q_N^2 (cf. [18]).

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial Q_N^2}{\partial x_1} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x_1} - \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)} = 0 & \\[2ex] \dfrac{\partial Q_N^2}{\partial x_i} = \dfrac{1}{2\mathrm{ch}^2\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right)} - \dfrac{1}{2\mathrm{ch}^2\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)} = 0 & i = 2, 3, \ldots, N-1 \\[2ex] \dfrac{\partial Q_N^2}{\partial x_N} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{x_N - x_{N-1}}{2}\right)} - \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(1-x_N)} = 0 & \end{array}\right.$$

d'où

$$\left|\begin{array}{ll} x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = d & i = 2, 3, \ldots, N-1 \\[2ex] \dfrac{x_2 - x_1}{2} = x_1 = \dfrac{d}{2} & \\[2ex] \dfrac{x_N - x_{N-1}}{2} = 1 - x_N = \dfrac{d}{2} & \end{array}\right.$$

Or

$$x_1 + \sum_{i=2}^{N} (x_i - x_{i-1}) + 1 - x_N = 1 = Nd$$

d'où

$$\boxed{d = \frac{1}{N}.}$$

Pour les noeuds correspondants, Q_N^2 est extremum (nécessairement maximum) et les poids sont tous égaux à $2\mathrm{th}\left(\frac{1}{2N}\right)$ et $Q_{N_{max}}^2 = 2N \,\mathrm{th}\, \frac{1}{2N}$.

On obtient donc une et une seule formule optimale et nous pouvons énoncer :

Théorème IV.5

Si dans $\mathcal{H}_1 = H^1_{(0,1)}$ on considère la formule d'intégration

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} A_i f(x_i) + R(f)$$

alors il existe un choix unique d'abscisses x_i^* $i = 1,2,\ldots,N$ et de poids A_i^* $i = 1,2,\ldots,N$ pour lesquels la norme de la fonctionnelle erreur R est minimum et on a

$$x_i^* = \frac{2i-1}{2N} \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

$$A_i^* = 2\,\mathrm{th}\left(\frac{1}{2N}\right)$$

et on a la majoration d'erreur :

$$|R(f)| \leq \left[1 - 2N\,\mathrm{th}\left(\frac{1}{2N}\right)\right]^{1/2} \|f\|_H$$

l'égalité étant atteinte si et seulement si $f \equiv 1$ $(f = h)$

7°) Remarques

1°) L'erreur R(f) est nulle pour $f \in V^*\ L(g.,x_1^*),\ldots,g(.,x_N^*))$, donc si $\tilde{f}$ est la projection orthogonale de f sur V^* on a

$$|R(f)| = |R(f-\tilde{f})| \leq (1 - 2N\ \mathrm{th}\frac{1}{2N})^{1/2} \|f-\tilde{f}\|_{H_1}$$

Compte tenu de la structure du noyau g (il est factorisable) on peut aisément expliciter $\|f-\tilde{f}\|_{\mathcal{H}_1}$ et on trouve la majoration plus fine :

$$|R(f)| = \left| \int_0^1 f(x)dx - \sum_{i=1}^{N} A_i^* f(x_i^*) \right|$$

$$\leq (1-2N+h\frac{1}{2N})^{1/2} \left[\|f\|_H^2 - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij}^* f(x_i^*) f(x_j^*) \right]^{1/2}$$

où (β_{ij}^*) est la matrice inverse de $G = (g(x_i^*, x_j^*))$, et dont l'expression est aisée (formules chapitre III).

Ce résultat est aussi la traduction de l'inégalité de l'hypercercle (hypercercle inequality" cf. [25])

2°) Pour N grand on a $x_i^* \sim \frac{i}{N}$

$$A_i^* \sim \frac{1}{N}$$

et l'erreur relative $\frac{|R(f)|^2}{\|f\|^2} \sim \frac{1}{12N^2}$

Pour obtenir une erreur relative $\frac{|R(f)|}{\|f\|}$ inférieure à ε on devra prendre approximativement N points avec

soit $\frac{1}{12N^2} \leq \varepsilon^2$

$N \geq \frac{1}{2\sqrt{3}\varepsilon}$ soit approximativement $N \geq 3.3\ 10^{p-1}$ points pour $\varepsilon = 10^{-p}$

Le fait que $x_1^* = \frac{1}{2N}$ $x_N^* = 1 - \frac{1}{2N}$ $x_{i+1}^* - x_i^* = \frac{1}{N}$ est à rapprocher du fait que dans $\mathcal{H}_1$, les fonctions ne sont pas nécessairement nulles aux bords ; on verra qu'il n'en est pas de même dans $\mathcal{H}_2 = H_{o(0,1)}^1$.

Pour N = 3 on a comme disposition des abscisses optimales :

Dans les tableaux qui suivent nous donnons, en rappelant ceux précédemment obtenus pour $\mathcal{K}_1$, les résultats relatifs aux autres espaces $\mathcal{K}_i$ $i = 2,3,4$. Pour chacun il y a unicité de la formule d'intégration optimale.

Le tableau I donne le problème aux limites permettant la détermination du noyau, le noyau, et le représentant de la fonctionnelle intégrale dans $\mathcal{K}_i$.

Le tableau II donne l'expression des fonctions splines de base u_i $i = 1,2,\ldots,p$ basées sur $t_1,t_2,\ldots,t_p$ ($t_1 \neq 0$ dans $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_4$ $t_p \neq 1$ dans $\mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_4$).

Le tableau III donne l'expression des coefficients B_i $i = 1,2,\ldots,p$ de la projection

$$p_h = \sum_{i=1}^{p} B_i\, g(.,t_i) \text{ de } h \text{ sur } V = L(g,y_1),g(.,t_2),\ldots,g(.,t_p)).$$

Le tableau IV donne l'expression de $\Phi^2(h;x,) = \|h - \sum_{i=1}^{p} B_i\, g(.,t_i)\|^2$

Le tableau V donne les noeuds et poids optimaux, et l'erreur relative correspondante.

Pour chacun des espaces $\mathcal{K}_i$ $i = 2,3,4$ on pourrait alors énoncer un théorème analogue au théorème IV.5.

TABLEAU - 1

espace	Problème aux limites	Noyau reproduisant	Représentant de la fonctionnelle intégrale
$\mathcal{H}_1$	$-y''+y = \delta_\alpha$ $y'(0) = y'(1) = 0$	$g(x,\alpha) = \begin{cases} \frac{ch x\ ch(1-\alpha)}{sh1} & 0 \le x \le \alpha \\ \frac{ch\alpha\ ch(1-x)}{sh1} & \alpha \le x \le 1 \end{cases}$	$h(x) = 1 \qquad 0 \le x \le 1$
$\mathcal{H}_2$	$-y''+y = \delta_\alpha$ $y(0) = y(1) = 0$	$g(x,\alpha) = \begin{cases} \frac{sh x\ sh(1-\alpha)}{sh1} & 0 \le x \le \alpha \\ \frac{sh\alpha\ sh(1-x)}{sh1} & \alpha \le x \le 1 \end{cases}$	$h(x) = 1 - \frac{sh x + sh(1-x)}{sh1} \qquad 0 \le x \le 1$
$\mathcal{H}_3$	$-y'' = \delta_\alpha$ $y(0) = y'(1) = 0$	$g(x,\alpha) = \min(x,\alpha) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \alpha \\ \alpha & \alpha \le x \le 1 \end{cases}$	$h(x) = x(1-\frac{x}{2}) \qquad 0 \le x \le 1$
$\mathcal{H}_4$	$-y'' = \delta_\alpha$ $y(0) = y(1) = 0$	$g(x,\alpha) = \begin{cases} x(1-\alpha) & 0 \le x \le \alpha \\ \alpha(1-x) & \alpha \le x \le 1 \end{cases}$	$h(x) = \frac{x(1-x)}{2} \qquad 0 \le x \le 1$

TABLEAU - II

Splines de base relatives à $t_1 < t_2 < \ldots < t_p$

$\mathcal{H}_1$	$u_1(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}t_1} & 0 \le x \le t_1 \\ \frac{\mathrm{sh}(x-t_2)}{\mathrm{sh}(t_1-t_2)} & t_1 \le x \le t_2 \\ 0 & t_2 \le x \le 1 \end{cases}$	$u_i(x) =$ $i=2,3,\ldots,p-1$ $\begin{cases} 0 & 0 \le x \le t_{i-1} \\ \frac{\mathrm{sh}(x-t_{i-1})}{\mathrm{sh}(t_i-t_{i+1})} & t_{i-1} \le x \le t_i \\ \frac{\mathrm{sh}(x-t_{i+1})}{\mathrm{sh}(t_i-t_{i+1})} & t_i \le x \le t_{i+1} \\ 0 & t_{i+1} \le x \le 1 \end{cases}$	$u_p(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le t_{p-1} \\ \frac{\mathrm{sh}(x-t_{p-1})}{\mathrm{sh}(t_p-t_{p-1})} & t_{p-1} \le x \le t_p \\ \frac{\mathrm{ch}(1-x)}{\mathrm{ch}(1-t_p)} & t_p \le x \le 1 \end{cases}$
$\mathcal{H}_2$	$u_1(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}t_1} & 0 \le x \le t_1 \\ \frac{\mathrm{sh}(x-t_2)}{\mathrm{sh}(t_1-t_2)} & t_1 \le x \le t_2 \\ 0 & t_2 \le x \le 1 \end{cases}$	idem	$u_p(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le t_{p-1} \\ \frac{\mathrm{sh}(x-t_{p-1})}{\mathrm{sh}(t_p-t_{p-1})} & t_{p-1} \le x \le t_p \\ \frac{\mathrm{sh}(1-x)}{\mathrm{sh}(1-t_p)} & t_p \le x \le 1 \end{cases}$
$\mathcal{H}_3$	$u_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{t_1} & 0 \le x \le t_1 \\ \frac{x-t_2}{t_1-t_2} & t_1 \le x \le t_2 \\ 0 & t_2 \le x \le 1 \end{cases}$	$u_i(x) =$ $i=2,3,\ldots,p-1$ $\begin{cases} 0 & 0 \le x \le t_{i-1} \\ \frac{x-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} & t_{i-1} \le x \le t_i \\ \frac{x-t_{i+1}}{t_i-t_{i+1}} & t_i \le x \le t_{i+1} \\ 0 & t_{i+1} \le x \le 1 \end{cases}$	$u_p(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le t_{p-1} \\ \frac{x-t_{p-1}}{t_p-t_{p-1}} & t_{p-1} \le x \le t_p \\ 1 & t_p \le x \le 1 \end{cases}$
$\mathcal{H}_4$	idem	idem	$u_p(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le t_{p-1} \\ \frac{x-t_{p-1}}{t_p-t_{p-1}} & t_{p-1} \le x \le t_p \\ \frac{1-x}{1-t_p} & t_p \le x \le 1 \end{cases}$

TABLEAU - III Expression de $B_i = (h|u_i)$ $i = 1,2,\ldots,p$

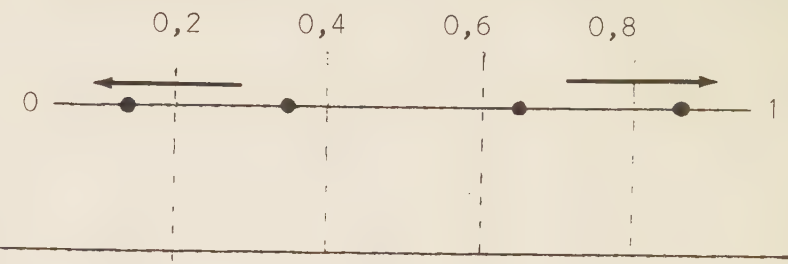
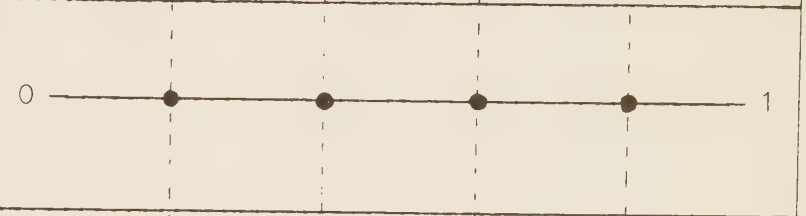
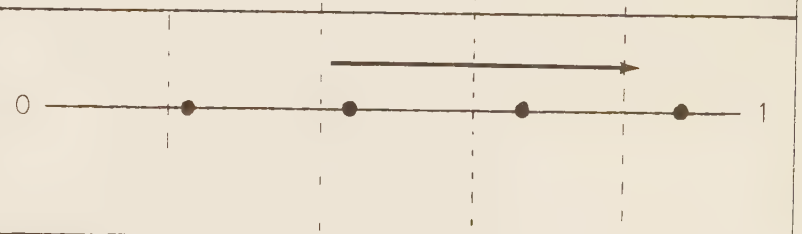
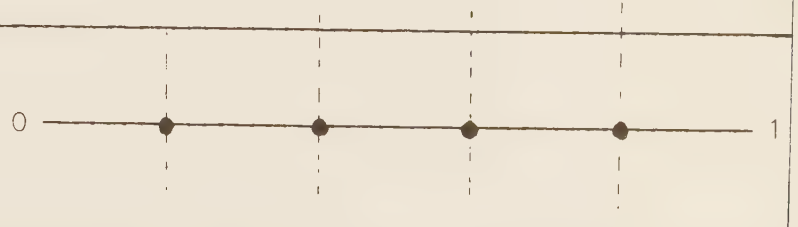
FC_1	$B_1 = th(\tau_1)$	$B_i = th(\frac{\tau_i-\tau_{i-1}}{2}) + th(\frac{\tau_{i+1}-\tau_i}{2})$ $i = 2,3,\ldots,p-1$	$B_p = th(1-\tau_p)$
FC_2	$B_i = th(\frac{\tau_i-\tau_{i-1}}{2}) + th(\frac{\tau_{i+1}-\tau_i}{2})$ $i = 1,2,\ldots,p$		avec $\tau_o = 0$ $\tau_{p+1} = 1$
FC_3	$B_i = \frac{\tau_{i+1}-\tau_{i-1}}{2}$ avec $\tau_o = 0$ $i = 1,2,\ldots,p-1$		$B_p = 1 - \frac{\tau_p+\tau_{p-1}}{2}$
FC_4	$B_i = \frac{\tau_{i+1}-\tau_{i-1}}{2}$ $i = 1,2,\ldots,p$		avec $\tau_o = 0$ $\tau_{p+1} = 1$

TABLEAU IV

Expression de $\Phi^2(h;x) = \|h - \sum_{i=1}^{p} B_i\, g(.,t_i)\|^2_{\mathcal{H}_i}$

	$\|h\|^2 = \int_0^1 h(x)dx$	$\|h - \sum_1^p B_i\, g(.,t_i)\|^2$
$\mathcal{H}_1$	1	$1 - th(t_1) + 2\sum_{i=2}^{p-1} th\left(\frac{t_i - t_{i-1}}{2}\right) + th(1-t_p)$
$\mathcal{H}_2$	$1 - 2\, th\left(\frac{1}{2}\right)$	$1 - 2\sum_{i=1}^{p+1} th\left(\frac{t_i - t_{i-1}}{2}\right)$ avec $t_o = 0$, $t_{p+1} = 1$
$\mathcal{H}_3$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{p} t_i t_{i+1}(t_{i+1} - t_i) + t_p(t_p^2 - 3t_p + 3)\right]$ avec $t_{p+1} = 1$
$\mathcal{H}_4$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12} - \frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{p} t_i t_{i+1}(t_{i+1} - t_i)\right]$ avec $t_{p+1} = 1$

TABLEAU - V

Espace	Noeuds optimaux $i = 1,2,\ldots,N$	Poids optimaux	$(\frac{R(f)}{\|f\|})^2$ mini.	Disposition des abscisses pour N = 4
$\mathcal{H}_1$	$x_i^* = \frac{2i-1}{2N}$	$A_i^* = 2\ th\ \frac{1}{2N}$	$1-2N\ th\ \frac{1}{2N}$	
$\mathcal{H}_2$	$x_i^* = \frac{i}{N+1}$	$A_i^* = 2th(\frac{1}{2(N+1)})$	$1-2(N+1)th(\frac{1}{2(N+1)})$	
$\mathcal{H}_3$	$x_i^* = \frac{2i}{2N+1}$	$A_i^* = \frac{2}{2N+1}$	$\frac{1}{3(2N+1)^2}$	
$\mathcal{H}_4$	$x_i^* = \frac{i}{N+1}$	$A_i^* = \frac{1}{N+1}$	$\frac{1}{12(N+1)^2}$	

Remarques

* On observe un glissement vers la gauche et aussi vers la droite des abscisses optimales lorsqu'on passe de $\mathcal{K}_2$ à $\mathcal{K}_1$ par exemple, ce qui est expliqué par le fait que dans $\mathcal{K}_1$, les fonctions ne sont pas nécessairement nulles aux bords. Au contraire dans le passage de $\mathcal{K}_2$ à $\mathcal{K}_3$, il y a un glissement à droite puisque les fonctions de $\mathcal{K}_3$ s'annulent à l'origine, mais pas nécessairement en x = 1.

* On a pour les quatre espaces les expressions pour N grand :

$$x_i^* \simeq \frac{i}{N}$$

$$A_i^* \simeq \frac{1}{N} \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

Erreur relative minimum $\simeq \dfrac{1}{2\sqrt{3}N}$.

* Dans $\mathcal{K}_4$, la formule optimale est exactement la formule des trapèzes. On peut donc dire que l'on a résolu un <u>problème inverse</u> : on a déterminé un espace dans lequel la formule des trapèzes est optimale.

* Avant de déterminer explicitement les noeuds et poids optimaux, nous avions à l'aide d'un programme -sur lequel nous reviendrons (cf. § IV.3)- déterminé expérimentalement ces noeuds et poids.

Le tableau ci-après résume les résultats obtenus pour $\mathcal{K}_2$, et les premières valeurs de N.

N	Valeur asymptotique de Φ_N^2 : $\Phi_N^2 \simeq \frac{1}{2\sqrt{3}(N+1)}$	Valeur de Φ_N^2 expérimentale	Valeur "exacte de Φ_N^2 : $\Phi_N^2 = 1-2(N+1)\text{th}\frac{1}{2(N+1)}$
2	0,009|25925...|	0,00915752|47|	0,009157523
3	0,005|2083...|	0,0051759|95.|	0,005175985
4	0,0033|333...|	0,0033200|67.|	0,0033200537
5	0,0023|148...|	0,0023084|3..|	0,0023084027
6	0,001|7007...|	⋮	⋮
7	⋮	⋮	⋮
8			
9	0,00083|33...|	0,00083250|32.|	0,0008325008

On a encadré les chiffres inexacts par rapport aux valeurs exactes (dernière colonne).

———X———

Une autre application

Considérons sur $H^1(\mathbb{R})$ (espace $\mathcal{H}_5$ page I.17) la fonctionnelle

$$\varphi \to T(\varphi) = \int_{-1}^{+1} \varphi(t)\,dt$$

On se propose de déterminer les abscisses $x_1,\ldots,x_N$ ($x_i \in [-1,+1]$ $i = 1,2,\ldots,N$) qui minimisent la norme de la fonctionnelle erreur dans la formule de quadrature approchée

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} A_i\, \varphi(x_i) + R(f)$$

Si nous développons les calculs suivant le plan adopté pour les exemples précédents nous obtenons

a) Comme expression du noyau reproduisant dans $H^1(\mathbb{R})$

$$g(x,\alpha) = \frac{1}{2}\, e^{-|x-\alpha|}$$

b) Comme expression du représentant h de T, dans $H^1(\mathbb{R})$

$$h(x) \begin{cases} = \operatorname{sh} 1\ e^{x} & x \leq -1 \\ = 1 - e^{-1} \operatorname{ch} x & -1 \leq x \leq 1 \\ = \operatorname{sh} 1\ e^{-x} & 1 \leq x \end{cases}$$

On a alors comme expression de la projection P_h de h sur $L(g(.,x_1),\ldots,g(.,x_n))$ si $-1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_N \leq 1$

$$P_h = \sum_{i=1}^{N} A_i\, g(.,x_i)$$

avec

$$\left|\begin{array}{l} A_1 = \dfrac{(1-e^{-1}\mathrm{ch}x_1)e^{x_2-x_1}-1+e^{-1}\mathrm{ch}x_2}{\mathrm{sh}(x_2-x_1)} \\ \\ A_i = \mathrm{th}\left(\dfrac{x_i-x_{i-1}}{2}\right) + \mathrm{th}\left(\dfrac{x_{i+1}-x_i}{2}\right) \qquad i = 2,3,\ldots,N-1 \\ \\ A_N = \dfrac{(1-e^{-1}\mathrm{ch}x_N)e^{x_N-x_{N-1}}-1+e^{-1}\mathrm{ch}x_{N-1}}{\mathrm{sh}(x_N-x_{N-1})} \end{array}\right.$$

On peut alors calculer $\|h-\sum_{i=1}^{N} A_i\, g(.,x_i)\|^2$, et chercher le minimum de cette quantité pour $x_1,\ldots,x_N \in [-1,+1]$.

Tous calculs faits on obtient comme dans des exemples précédents :

$$\text{et}\left|\begin{array}{l} x^*_{i+1}-x^*_i = d = \text{cte} \qquad i = 1,2,\ldots,N-1 \\ \\ x^*_N = -x^*_1 \end{array}\right.$$

x^*_N étant l'unique zéro de la fonction $\theta(x) = \dfrac{2}{\mathrm{ch}^2\dfrac{x}{N-1}} - 2e^{x-1} + 2e^{2x-2}$ sur $]0,1[$.

Pour les poids correspondants à x^*, on obtient ($N > 1$)

$$\left|\begin{array}{l} A^*_i = 2\ \mathrm{th}\left(\dfrac{x^*_N}{N-1}\right) \qquad i = 2,3,\ldots,N-1 \\ \\ A^*_1 = A^*_N = 1-e^{-1+x^*_N}+\mathrm{th}\left(\dfrac{x^*_N}{N-1}\right) \simeq \mathrm{th}\left(\dfrac{x^*_N}{N-1}\right) \qquad (N \text{ grand}) \end{array}\right.$$

Autrement dit les poids extrêmes A_1^* et A_N^* tendent à devenir moitié des poids intermédiaire A_i^*, $2 \leq i \leq N-1$.

Ce résultat est en concordance complète, avec les résultats obtenus expérimentalement par G. NISSEN et Y. CHERRUAULT (cf. [13], [14]) qui ont étudié ce même problème, en faisant uniquement des essais numériques, sans tenir compte d'ailleurs du fait que G_N^{-1} est une matrice tridiagonale.

Notons enfin que l'on a pour N grand

$$\text{et} \quad \left\| \begin{array}{l} -x_1^* = x_N^* \simeq 1 - \dfrac{1}{N-1} \\ \\ \left(\dfrac{R(f)}{\|f\|}\right)^2 \simeq \dfrac{2}{3(N-1)^2} \end{array} \right.$$

———————×———————

IV.6 - CONTINUITE DE L'APPLICATION $x \in X^N \to \Phi^2(h;x) \in \mathbb{R}^+$

Introduction

Il est très naturel de s'intéresser à cette question, car dans le cas où X est compact, la continuité de $\Phi^2(h;x)$ est alors une condition suffisante d'existence d'un meilleur approximant. On peut noter, que dans les exemples étudiés § IV.5 et concernant l'étude de la fonctionnelle intégrale dans les espaces $\mathcal{H}_i$ (i=1,2,3,4), la fonction $x \in X^N \to \Phi^2(h;x)$ est continue sur X^N. On peut se demander s'il ne s'agit pas d'un phénomène général dans ce type d'espaces ; autrement dit en est-il de même pour d'autres fonctionnelles que la fonctionnelle intégrale ?

Le problème revêt l'aspect géométrique suivant :

Etant donné un moint M de l'espace hilbertien H, et la variété $V_{x_1,\ldots,x_N} = L(u_1,u_2,\ldots,u_N)$ de dimension au plus égale à N, avec $u_i = u_{(x_i)} \in H \quad i = 1,2,\ldots,N \; ; \; x_i \in X \subset \mathbb{R}$, $i = 1,2,\ldots,N$;
que peut-on dire du point de vue de la continuité de l'application

$$(x_1,\ldots,x_N) \in X^N \to d(M,V_{x_1,\ldots,x_N}) \quad \text{(distance de M à V) ?}$$

Les difficultés sont en fait dues à ce que la dimension de V peut varier : $\dim(V) \leq N$.

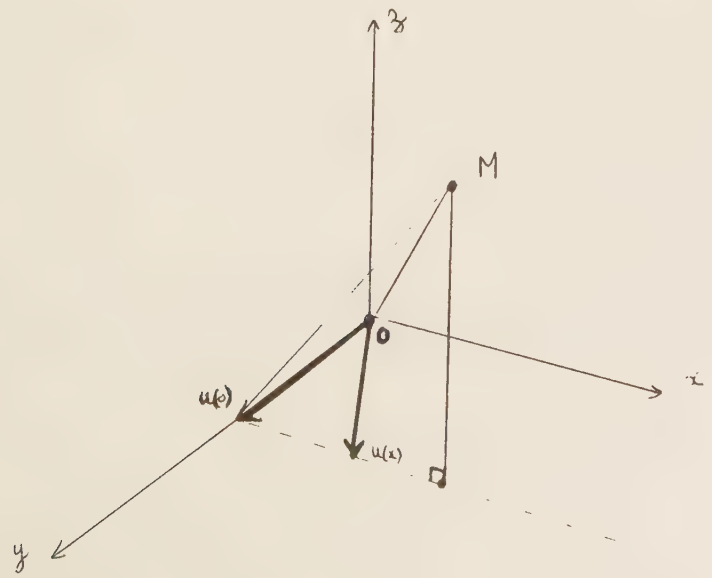
Exemple :

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère M = (1,1,1)
et l'application $x \in \mathbb{R} \to u(x) \in \mathbb{R}^3 \quad u(x) = (x,1,0)$.

Considérons $V = L(u(0),u(x))$

On a V = plan x Oy si $x \neq 0$
= axe Oy si $x = 0$

et d(M,V) demeure constante pour $x \neq 0$, mais subit une discontinuité lorsque x s'annule



IV.6.1. - Etude lorsque $H = H_{(\alpha;\beta)}$

Nous nous proposons donc d'étudier le problème général posé ci-dessus, dans le cas particulier des espaces $H_{(\alpha,\beta)}$, qui on le sait, sont des espaces à noyau reproduisant de type factorisable particulièrement simple :

$$g(x,\lambda) = \min(x,\lambda) \qquad \forall (x,\lambda) \in \bar{X} \times \bar{X}$$

$$(\text{où } X = \,]\alpha,\beta[\qquad (0 \leq \alpha < \beta)\ )$$

Rappelons par commodité la définition de $H_{(\alpha,\beta)}$

$$H_{(\alpha,\beta)} = \{\varphi \in C^0_{\alpha,\beta} \mid \varphi' \in L^2_{(\alpha,\beta)},\ \varphi(0) = 0 \text{ si } \alpha = 0\ ;$$

$$(\varphi|\Psi)_{H_{(\alpha,\beta)}} = \int_\alpha^\beta \varphi'(x)\Psi'(x)dx + \frac{\varphi(\alpha)\Psi(\alpha)}{\alpha} \text{ si } \alpha \neq 0$$

$$= \int_0^\beta \varphi'(x)\Psi'(x)dx \qquad \text{si } \alpha = 0\}$$

et on a $H_{(\alpha,\beta)} \subset C^0_{(\bar{X})}$.

D'après les résultats du § III.7, on a pour $h \in H_{(\alpha,\beta)}$ et $x=(x_1,x_2,\ldots,x_N) \in \bar{X}^N$

$$\Phi^2(h;x) = \|h\|^2 - \left| \frac{h^2(t_1)}{t_1} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(h(t_{i+1})-h(t_i))^2}{t_{i+1}-t_i} \right| \qquad (1)$$

où $\alpha \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_p \leq \beta$; $t_1,\ldots,t_p$ étant les abscisses non nulles, distinctes et ordonnées, que l'on peut extraire de $\{x_1,\ldots,x_N\}$. Nous allons démontrer le :

Théorème IV.6.1.

Quel que soit $h \in H_{(\alpha,\beta)}$, la fonction $x \in \bar{X}^N \to \Phi^2(h;x) \in \mathbb{R}^+$, est continue sur $\bar{X}^N$.

Démonstration :

Considérons $x = (x_1,\ldots,x_N) \in \bar{X}^N$. Nous supposerons tout d'abord que l'on a $x \neq 0$ (ce qui est nécessairement vérifié dans le cas $\alpha > 0$). Avec les notations précédentes $\Phi^2(h;x)$ est donné par (1). Nous allons étudier la continuité en ce point.

Soit $x^{(s)} = (x_1^{(s)}, x_2^{(s)},\ldots,x_N^{(s)})$, $x^{(s)} \in X^N$ avec

$$\lim_{s\to+\infty} x^{(s)} = x$$

Nous devons montrer que

$$\lim_{s\to+\infty} \Phi^2(h;x^{(s)}) = \Phi^2(h;x)$$

Posons $d = \min_{i=1,2,\ldots,p-1} (t_{i+1}-t_i)$. Puisque $x \neq 0$ on a $d > 0$. Puisque $x^{(s)}$ tend vers x quand s tend vers l'infini, on peut trouver S tel que

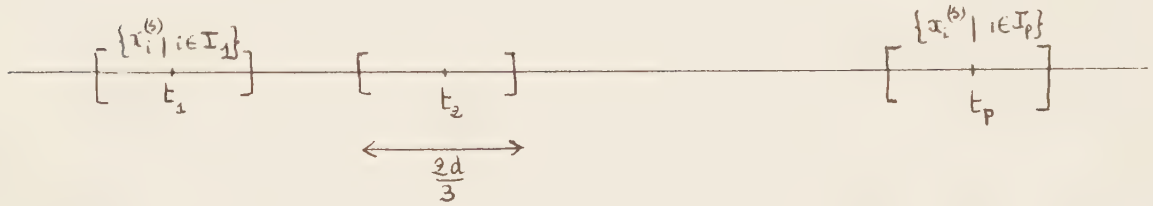
$$s \geq S \Rightarrow \|x^{(s)}-x\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,N} |x_i^{(s)}-x_i| \leq \frac{d}{3}$$

ce qui signifie (puisque $x_i = t_k$, $k \in \{1,2,\ldots,p\}$) que les abscisses $x_i^{(s)}$ de $x^{(s)}$, sont pour $s \geq S$, disposées en p groupes ne se "chevauchant pas" :

$$\{x_i^{(s)}\ ,\ i \in I_r\} \qquad r = 1,2,\ldots,p$$

avec $I_r \subset \{1,2,\ldots,N\}$ $I_r \cap I_{r'} = \Phi$ si $r \neq r'$ et $\sum_{i=1}^{p} \text{card}(I_r) = N$
et

$$|x_i^{(s)} - t_r| \leq \frac{d}{3} \qquad \forall i \in I_r \qquad r = 1,2,\ldots,p$$



La partition de $\{1,2,\ldots,N\}$ en $I_1, I_2, \ldots, I_p$ est fixe pour $s \geq S$.
Nous devons alors calculer $\Phi^2(h;x^{(s)})$.

Pour cela nous ne devons retenir que les abscisses distinctes de $x^{(s)}$, et les ordonner. Ce travail peut être fait dans chacun des ensembles

$$\{x_i^{(s)} \mid i \in I_r\} \quad , \quad r = 1,2,\ldots,p$$

Soient $t_{1,s}^{(r)} < t_{2,s}^{(r)} < \ldots < t_{m(r,s),s}^{(r)}$ les abscisses distinctes et ordonnées extraites de $\{x_i^{(s)} \mid i \in I_r\}$ $r = 1,2,\ldots,p$.

$$1 \leq m(r,s) \leq \text{card}(I_r)$$

On a alors pour $s \geq S$ (S peut être pris suffisamment grand pour avoir $t_{1,s}^{(s)} > 0$, si $\alpha = 0$) :

$$\Phi^2(h;x^{(s)}) = \|h\|^2_{H_{(\alpha,\beta)}} - \left[\frac{h^2(t_{1,s}^{(1)})}{t_{1,s}^{(1)}} + \sum_{i=1}^{m(1,s)-1} \frac{\left[h(t_{i+1,s}^{(1)}) - h(t_{i,s}^{(1)})\right]^2}{t_{i+1,s}^{(1)} - t_{i,s}^{(1)}} \right]$$

$$- \sum_{r=2}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m(r,s)-1} \frac{\left[h(t_{i+1,s}^{(r)}) - h(t_{i,s}^{(r)})\right]^2}{t_{i+1,s}^{(r)} - t_{i,s}^{(r)}} \right)$$

$$- \sum_{r=1}^{p-1} \frac{\left[h(t_{1,s}^{(r+1)}) - h(t_{m(r,s),s}^{(r)})\right]^2}{t_{1,s}^{(r+1)} - t_{m(r,s),s}^{(r)}}$$

Or $h \in C^0_{(\bar{X})}$ et donc $\lim_{s\to\infty} \max_{i=1,2,\ldots,m(r,s)} \left[h(t_{i,s}^{(r)}) - h(t_r)\right] = 0$

et

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{s\to\infty} \dfrac{h^2(t_{1,s}^{(1)})}{t_{1,s}^{(1)}} = \dfrac{h^2(t_1)}{t_1} \\ \\ \lim_{s\to\infty} \displaystyle\sum_{r=1}^{p-1} \dfrac{\left[h(t_{1,s}^{(r+1)}) - h(t_{m(r,s),s}^{(r)})\right]^2}{t_{1,s}^{(r+1)} - t_{m(r,s),s}^{(r)}} = \sum_{r=1}^{p-1} \dfrac{\left[h(t_{r+1}) - h(t_r)\right]^2}{t_{r+1} - t_r} \end{array} \right.$$

En conséquence on aura

$$\lim_{s\to\infty} \Phi^2(h;x^{(s)}) = \Phi^2(h;x) \quad \text{si et seulement si}$$

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{r=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m(r,s)-1} \frac{\left[h(t_{i+1,s}^{(r)}) - h(t_{i,s}^{(r)})\right]^2}{t_{i+1,s}^{(r)} - t_{i,s}^{(r)}} \right) = 0$$

On a une somme finie de termes positifs, et donc pour que $\lim_{s\to\infty} \Phi^2(h;x^{(s)}) = \Phi^2(h;x)$ il faut et suffit que chacun tende vers 0 .

et finalement $x \to \Phi^2(h;x)$ est continue sur $X^N-\{0\}$ ssi

$$\lim_{\substack{u,v \to w \\ u \neq v}} \frac{[h(u)-h(v)]^2}{u-v} = 0 \qquad \forall w \in X-\{0\}$$

Or pour $h \in H_{(\alpha,\beta)}$ cette condition est toujours réalisée (cf. § I.6.2.).
Il reste à considérer le cas où $\alpha = 0$ et $x = 0 \in X^N$.

Dans ce cas $\Phi^2(h;x) = \|h\|^2$. On obtient alors immédiatement comme condition supplémentaire : $\lim_{t \to o} \frac{h^2(t)}{t} = 0$, ce qui est précisément réalisé pour toute fonction h de $H_{(\alpha,\beta)}$. (cf. § I.6.2.).

Ceci achève la démonstration.

———X———

Remarque

Ce résultat n'est pas très surprenant. En effet nous avons vu (remarque § III.5.2.) que dans un espace hilbertien à noyau factorisable, ici $H_{(\alpha,\beta)}$, les seules relations de dépendance entre $g(.,x_i)$, fonctionnelles d'évaluation, étaient des relations de proportionnalité. En particulier il est donc impossible d'avoir $x_1 \neq x_2$, $x_2 \neq x_3$, $x_1 \neq x_3$ $g(.,x_i) \neq 0$, $i = 1,2,3$ et $d(L(g.,x_1),g(.,x_2),g(.,x_3)) = 2$, c'est-à-dire trois vecteurs distincts et coplanaires. Il ne peut donc pas se produire de phénomène analogue à celui de l'exemple introductif relatif à $\mathbb{R}^3$.

———X———

IV.6.2. - APPLICATION : EXISTENCE DE FORMULES OPTIMALES POUR L'APPROXIMATION DE FONCTIONNELLES LINEAIRES CONTINUES SUR LES ESPACES $H_{(\alpha,\beta)}$

Reprenons l'expression originelle de $\Phi^2(h;x)$ pour $h \in H_{(\alpha,\beta)}$
$x = (x_1,x_2,\ldots,x_N) \in \bar{X}^N$ avec $X =]\alpha,\beta[$, $0 \leq \alpha < \beta$

$$\Phi^2(h;x) = \min_{A\in\mathbb{R}^N} \|h - \sum_{i=1}^{N} A_i\, g(.,x_i)\|^2_{H_{(\alpha,\beta)}}$$

D'après le théorème IV.6.1, l'application $x \in \bar{X}^N \to \Phi^2(h;x)$ est continue sur $\bar{X}^N$. Si $\beta < +\infty$, $\bar{X}^N$ est compact, et en conséquence $\Phi^2(h;x)$ atteint son minimum sur $\bar{X}^N$: autrement dit il existe un jeu au moins de poids A_i^* et de noeuds x_i^*, $i = 1,2,\ldots,N$ tel que

$$\|h - \sum_{i=1}^{N} A_i^*\, g(.,x_i^*)\|_{H_{(\alpha,\beta)}} = \min_{\substack{A=(A_1..A_N)\in\mathbb{R}^N \\ x=(x_1..x_n)\in\bar{X}^N}} \|h - \sum_{i=1}^{N} A_i\, g(.,x_i)\|_{H_{(\alpha,\beta)}}$$

Nous allons montrer qu'il en est encore ainsi quand $\beta = +\infty$. En d'autres termes nous allons prouver le :

Théorème IV.6.2.

Quel que soit $h \in H_{(\alpha,\beta)}$ ($0 \leq \alpha < \beta$) et que soit l'entier naturel N, il existe toujours un jeu au moins de noeuds $x_i^* \in \bar{X}$ et de poids A_i^*, $A_i^* \in \mathbb{R}$ $i = 1,2,\ldots,N$ vérifiant :

$$\|h - \sum_{i=1}^{N} A_i^*\, g(.,x_i^*)\|_{H_{(\alpha,\beta)}} = \min_{(x;A)\in\bar{X}^N\times\mathbb{R}^N} \|h - \sum_{i=1}^{N} A_i\, g(.,x_i)\|_{H_{(\alpha,\beta)}}$$

(autrement dit, quel que soit N, h admet une approximation optimale).

Démonstration :

Nous n'avons à envisager que le cas où $\beta = +\infty$; le domaine D sur lequel on veut minimiser la fonction continue $\Phi^2(h;x)$, n'est pas compact :

$$D = \bar{X}^N \text{ avec } \bar{X} = [\alpha, +\infty[$$

et on ne peut conclure directement.

Tout d'abord on remarquera que $\Phi^2(h;x) = \Phi^2(h;x_1,x_2,\ldots,x_N)$ est une fonction symétrique des composantes x_i de x, et donc

$$\inf_{x\in D} \Phi^2(h;x) = \inf_{x\in D_o} \Phi^2(h;x) \quad \text{avec} \quad D_o = \{x \in D \mid \alpha \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_N\}$$

Pour prouver le théorème nous allons montrer que l'on peut trouver un compact K, $K \subset D_o$, tel que

$$\inf_{x\in D_o} \Phi^2(h;x) = \min_{x\in K} \Phi^2(h;x).$$

Notre raisonnement est en quelque sorte un raisonnement par récurrence sur N. Pour $x \in D_o$, on a toujours (cf. § IV.6.1.)

$$\Phi^2(h,x) = \|h\|^2 - \left[\frac{h^2(x_1)}{x_1} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(h(x_{+1})-h(x_i))^2}{x_{i+1}-x_i}\right] \leq \|h\|^2$$

Cette expression gardant un sens, si certaines composantes de x s'annulent (cas $\alpha = 0$) ou se confondent (continuité de $x \to \Phi^2(h;x)$)

1°) Montrons que dans la recherche du minimum de $\Phi^2(h;x)$ on peut s'astreindre à faire varier x_1 dans un intervalle borné de $\mathbb{R}$.

En effet, deux possibilités sont à envisager :

α) Soit $\Phi^2(h;x) = \|h\|^2 \quad \forall x \in D_o$ et on a nécessairement $h = 0$ (dans ce cas, le problème de meilleure approximation de h ne se pose plus).

β) Soit il existe $\bar{x} \in D_o$ avec $\Phi^2(h;\bar{x}) < \|h\|^2$

Considérons alors x quelconque dans D_o.

On sait que l'on a (cf. § I.6.2.)

i) $$\lim_{t\to+\infty} \frac{h^2(t)}{t} = 0$$

ii) et $$\lim_{\substack{t,u\to+\infty \\ t\neq u}} \frac{[h(t)-h(u)]^2}{t-u} = 0$$

Donc si on fait varier x dans D_o, de sorte que $\lim x_1 = +\infty$, et donc également $\lim x_j = +\infty$ $j = 2,3,\ldots,N$, on aura

$$\lim_{x_1\to+\infty} \Phi^2(h;x) = \|h\|^2 > \Phi^2(h;\bar{x})$$

Autrement dit il existe $A_1 \in \mathbb{R} \qquad A_1 \geq \bar{x}_1$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} x \in D_o \\ x_1 > A_1 \end{array}\right| \Rightarrow \Phi^2(h;x) > \Phi^2(h;\bar{x})$$

et par conséquent

$$\inf_{x\in D_o} \Phi^2(h;x) = \inf_{x\in D_1} \Phi^2(h;x)$$

avec $D_1 = D_o \cap \{x \in D_o \ | \alpha \leq x_1 \leq A_1\}$.

2°) Supposons avoir mis en évidence A_i, $i = 1,2,\ldots,k$ avec $\alpha \leq A_i$ $i = 1,2,\ldots,k$ et tels que

$$\inf_{x \in D_o} \Phi^2(h;x) = \inf_{x \in D_k} \Phi^2(h;x)$$

où $D_k = D_o \cap \{x \in D_o \mid \alpha \leq x_j \leq A_j \quad j = 1,2,\ldots,k\}$

Considérons le compact C_k, $C_k \subset D_k$ défini

$$C_k = \{x \in D_k \mid x_j = x_k,\ j = k+1,\ldots,N\} \subset \bar{X}^N$$

La fonction $\Phi^2(h;x)$ est continue sur C_k (th. IV.6.1.) et donc il existe $x^* \in C_k$ tel que

$$\Phi^2(h;x^*) = \min_{x \in C_k} \Phi^2(h;x)$$

Deux éventualités sont alors possibles :

α) $\forall x \in D_k$ on a $\Phi^2(h;x) \geq \Phi^2(h;x^*)$

dans ce cas on prendra $K = C_k$

β) $\exists \bar{x} \in D_k$ vérifiant $\Phi^2(h;\bar{x}) < \Phi^2(h;x^*)$

Soit alors x quelconque dans D_k : $x = (x_1,\ldots,x_N)$

$$\Phi^2(h;x) = \|h\|^2 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\left[h(x_{i+1}) - h(x_i)\right]^2}{x_{i+1} - x_i}$$

$$- \frac{\left[h(x_{k+1}) - h(x_k)\right]^2}{x_{k+1} - x_k} - \sum_{i=k+1}^{N-1} \frac{\left[h(x_{i+1}) - h(x_i)\right]^2}{x_{i+1} - x_i}$$

Fixons $x_1,\ldots,x_k$ et faisons varier x de sorte que x_{k+1} tende vers $+\infty$, et donc $x_j \to +\infty$ $j = k+1,\ldots,N$.

On a toujours d'après (i) et (ii)

$$\lim_{\substack{x_{k+1}\to+\infty \\ x_1,..x_k \text{ fixés}}} \Phi^2(h;x) = \|h\|^2 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{[h(x_{i+1})-h(x_i)]^2}{x_{i+1}-x_i}$$

$$= \Phi^2(h;x_1,\ldots x_{k-1},x_k,x_k,\ldots x_k)$$

$$= \Phi^2(h;\tilde{x}) \text{ avec } \tilde{x} \in C_k$$

On a donc

$$\Phi^2(h;\tilde{x}) = \lim_{\substack{x_{k+1}\to+\infty \\ x_1..x_k \text{ fixés}}} \Phi^2(h;x) \geq \Phi^2(h;x^*) > \Phi^2(h;\bar{x}) \quad \text{par hypothèse}$$

et en conséquence on peut exhiber $A_{k+1} \in \mathbb{R}$, $A_{k+1} > \bar{x}_k$ tel que

$$\Phi^2(h;x) > \Phi^2(h;\bar{x}) \qquad \forall x \in D_k \text{ et vérifiant } x_{k+1} > A_{k+1}$$

Ainsi

$$\inf_{x\in D_k} \Phi^2(h;x) = \inf_{x\in D_{k+1}} \Phi^2(h;x)$$

en prenant

$$D_{k+1} = D_o \cap \{x \in D_o \mid \alpha \leq x_j \leq A_j \quad j = 1,2,\ldots,k+1\}$$

3°) En itérant ce processus, on a au plus tard à l'étape N un compact $K \subset D_o \subset \bar{X}^N$ et tel que

$$\inf_{x \in D_o} \Phi^2(h;x) = \min_{x \in K} \Phi^2(h;x)$$

Ce qui achève la démonstration.

———X———

Conséquences :

Nous avons vu au chapitre III que les espaces hilbertiens associés à des noyaux de type factorisable (tout au moins une large classe de ces espaces) pouvaient être mis en correspondance isométrique avec des espaces de type $H_{(\alpha,\beta)}$.
Précisons cette correspondance :

On notera H l'espace de noyau g, factorisable sur $X \subset \mathbb{R}$, de composantes a et b. On notera comme antérieurement $v(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ $x \in X$ $a(x) \neq 0$, et on posera (cf. chapitre III)

$$v_X = \{t \in \mathbb{R} \mid \exists x \in X \quad a(x)b(x) \neq 0 \quad v(x) = t\}.$$

On suppose en outre que v_X est un intervalle (α,β) de $\mathbb{R}$.
On a alors (cf. Chapitre III)

$$H = r_S^{-1} \circ T^{-1} (H_{(\alpha,\beta)}) \qquad H \xrightarrow{r_S} H^S \xrightarrow{T} H_{(\alpha,\beta)}$$

où r_S est l'opérateur de restriction des fonctions de H à un support S du noyau g, et T l'opérateur défini en III-8-2.

Calculons $\left[T_o r_S\right]_{(g(.,\lambda)}$ $\lambda \in X$, $g(.,\lambda) \neq 0$

On a
$$g(x,\lambda)\begin{cases} = a(x)b(\lambda) & x \leq \lambda \\ = a(\lambda)b(x) & \text{sinon} \end{cases} \qquad (x,\lambda) \in X * X$$

Soit

$$\frac{g(x,\lambda)}{a(x)}\begin{cases} = b(\lambda) & x \leq \lambda \\ = a(\lambda)v(x) & \lambda \leq x \end{cases}$$

ou encore

$$\frac{g(x,\lambda)}{a(x)}\begin{cases} = a(\lambda)v(\lambda) & x \leq \lambda \\ = a(\lambda)v(x) & \lambda \leq x \end{cases}$$

d'où

$$\left[T_o r_S\right](g(.,\lambda))_{(t)} = a(\lambda)t \quad \text{si } t \leq v(\lambda) \qquad t \in (\alpha,\beta)$$
$$= a(\lambda)\, v(\lambda) \text{ si } v(\lambda) \leq t$$

Notons $G(.,t)$ le représentant dans $H_{(\alpha,\beta)}$ de la fonctionnelle δ_t, autrement dit G est le noyau reproduisant de $H_{(\alpha,\beta)}$, c'est-à-dire $G(u,t) = \min(u,t)$. On a alors avec ces notations :

$$\boxed{\begin{aligned} T_o r_S\,(g(.,\lambda)) &= a(\lambda)\; G(.,v(\lambda)) \quad \text{si } g(.,\lambda) \neq 0 \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{si } g(.,\lambda) = 0 \end{aligned}} \qquad (1)$$

Considérons alors $f \in H$ et notons $F = (T_o r_S)(f)$, $F \in H_{(\alpha,\beta)}$. $T_o r_S$ est une isométrie, et d'après le théorème IV.6.2., F admet une approximation optimale quel que soit N. Autrement dit N étant donné, il existe un jeu au moins de poids $B_i^* \in \mathbb{R}$ et de noeuds $\lambda_i^* \in (\overline{\alpha,\beta})$ $i = 1,2,\ldots,N$ tels que :

$$\left\| F - \sum_{i=1}^{N} B_i^* G(.,\lambda_i^*) \right\|_{H_{(\alpha,\beta)}} = \min_{\substack{B_i \in \mathbb{R} \\ \lambda_i \in (\overline{\alpha,\beta}) \\ i=1,2,\ldots,N}} \left\| F - \sum_{i=1}^{N} B_i G(.,\lambda_i) \right\|_{H_{(\alpha,\beta)}}$$

Compte tenu de (1) on a alors aussi

$$\left\| f - \Sigma A_i^* g(.,x_i^*) \right\|_H = \min_{\substack{A_i \in \mathbb{R} \\ x_i \in X \\ i=1,2,\ldots,N}} \left\| f - \Sigma A_i g(.,x_i) \right\|_H$$

pour tout jeu (x_i^*, A_i^*) $i = 1,2,\ldots,N$ vérifiant

$$\boxed{\begin{aligned} & x_i^* \in v^{-1}(\lambda_i^*) \\ & A_i^* = \frac{B_i^*}{a(x_i^*)} \qquad\qquad i = 1,2,\ldots,N \end{aligned}} \qquad (2)$$

Autrement dit pour une très large classe d'espaces hilbertiens à noyaux factorisables (ceux envisagés au chapitre III), l'existence pour toute fonctionnelle linéaire continue d'une approximation optimale par des fonctionnelles d'évaluation, est acquise.

Exemples :

(1°) Si on considère $H = H_{[-1,+1]} = \{\varphi \in L^2_{(-1,+1)} \mid \varphi' \in L^2_{(-1,+1)}$

$$(\varphi|\Psi)_H = \int_{-1}^{+1} (\varphi\Psi + \varphi'\Psi')(x)dx\}$$

H est isométrique à un espace de type $H_{(\alpha,\beta)}$ (cf. exemple III). Si on considère sur H la fonctionnelle "valeur principale $\frac{1}{x}$", cette fonctionnelle admet une approximation optimale par des fonctionnelles de Dirac.

$$\ell = v_p\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \ell(\varphi) = v_p \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{x} \in H' \qquad \text{(cf. [31]))}$$

(2°) Nous étudierons en détail au § IV.9 un exemple de détermination d'une formule d'approximation optimale pour une fonctionnelle du type

$\varphi \to \ell(\varphi) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$ dans l'espace $H_{(\alpha,\beta)}$ (avec $\alpha = 0$, $\beta = 1$)

———X———

Une interprétation des approximations optimales dans $H = H_{(\alpha,\beta)}$

On a pour $f \in H_{(\alpha,\beta)}$

$$\|f\|^2 = \int_\alpha^\beta f'^2(x)dx + \frac{f^2(\alpha)}{\alpha} \qquad \text{si } \alpha \neq 0$$

$$= \int_0^\beta f'^2(x)dx \qquad \text{si } \alpha = 0$$

Considérons $\bar{f}$ définie sur $[0,\alpha[$

$$\begin{cases} \bar{f}(x) = f(\alpha) \times x & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ \bar{f}(x) = f(x) & \text{si } \alpha \leq x < \beta \end{cases}$$

On peut écrire

$$\|f\|^2_{H_{(\alpha,\beta)}} = \int_0^\beta \bar{f}'^2(x)dx$$

D'autre part pour $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $x_i \in \alpha, \beta$ $\quad i = 1,2,\ldots,n$ on a

$$\Phi^2(f;x) = \min_{A\in\mathbb{R}^n} \left\| f - \sum_{i=1}^{n} A_i g(.,x_i) \right\|^2_{H(\alpha,\beta)}$$

$$= \|f\|^2 - \underbrace{\left[\frac{f^2(x_1)}{x_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(f(x_{i+1})-f(x_i))^2}{x_{i+1} - x_i} \right]}_{M} \geq 0$$

M peut donc être interprété comme une valeur par défaut de $\|f\|^2 = \int_0^\beta \bar{f}'^2(x)dx$, valeur obtenue en prenant comme approximation de $\bar{f}'$:

$$\left| \begin{array}{ll} \bar{f}'(x) = \dfrac{\bar{f}(x_1)}{x_1} = \dfrac{f(x_1)}{x_1} & \text{dans } [0,x_1] \\ \\ \bar{f}'(x) = \dfrac{\bar{f}(x_{i+1})-\bar{f}(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} & \text{dans } [x_i,x_{i+1}] \quad i=1 \\ & \\ & i=1,2,\ldots,n-1 \end{array} \right.$$

Par conséquent les noeuds optimaux x_i^* dans l'approximation de f, sont les noeuds pour lesquels l'approximation par défaut, précédemment définie, est la meilleure possible.

IV- 7 UNE CARACTERISATION DES APPROXIMATIONS OPTIMALES

Si on cherche dans H la meilleure approximation de la fonctionnelle $\delta_\alpha : f \to \delta_\alpha(f) = f(\alpha)$, par une combinaison $\sum_{i=1}^{N} A_i \delta_{x_i}$, $(N \geq 1)$, on aura bien sûr existence d'une telle meilleure approximation. Il suffit en effet de prendre $x_i^* = \alpha \quad i = 1,2,\ldots,N$ avec $\sum_{i=1}^{N} A_i^* = 1$.

Il est intéressant de manière générale de savoir, si pour une fonctionnelle ℓ

$$\ell \in H' : f \in H \to \ell(f) \in \mathbb{R}$$

et pour N fixé, une approximation optimale utilise N abscisses x_i^* $i = 1,2,\ldots,N$ toutes distinctes.

Nous pendrons comme

Définition IV.7

Une approximation optimale $\ell^* = \sum_{i=1}^{N} A_i^* \delta_{x_i^*}$, de ℓ, $\ell \in H'$, est dite d'ordre p $(1 \leq p \leq N)$ si le vecteur $x^* = (x_1^*,\ldots,x_N^*)$ a exactement p composantes distinctes, les poids A_i^* correspondants étant non nuls.

Ainsi si $\ell = \delta_\alpha \neq 0, \ell^*$ est d'ordre 1 quel que soit $N \geq 1$.

Plus généralement si $\ell = \sum_{j=1}^{K} \alpha_i \delta_{y_i}$ $\left|\begin{array}{l} \alpha_i \in \mathbb{R} \\ \\ y_i \in X \end{array}\right.$ $i = 1,2,\ldots,K$

ℓ^* est d'ordre p, où p est la dimension de $L(\delta_{y_1},\ldots,\delta_{y_k})$ dans H'.

Nous allons donner un résultat concernant l'ordre d'une approximation optimale. Ce résultat est très général, et ne s'applique pas seulement aux espaces envisagés jusqu'à maintenant mais dans tout espace $H \subset \mathbb{R}^X$ tel que $\delta_\alpha \in H'$ $\forall \alpha \in X$, et où on suppose l'existence d'une approximation optimale pour $\ell \in H'$.

———X———

On a le :

Théorème IV.7

Si ℓ ne s'exprime pas comme combinaison linéaire de N-1 fonctionnelles de Dirac

$$\ell - \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \delta_{a_i} \neq 0 \qquad \left\| \begin{array}{l} \forall \lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1} \\ \forall a = (a_1,a_2,\ldots,a_{N-1}) \in X^{N-1} \end{array} \right.$$

et si ℓ^* existe, alors ℓ^* est d'ordre N.

Démonstration

Supposons que ℓ^* est d'ordre p, $p < N$, $\ell^* = \sum_{i=1}^{p} A_i^* \delta_{x_i^*}$ $x_i^* \neq x_j^*$ si $i \neq j$ et $A_i^* \neq 0$ $i = 1,2,\ldots,p$.

Posons $r = \ell - \ell^*$. On a nécessairement (cf. IV.8) les relations d'orthogonalité

$$(r|\delta_{x_i^*})_{H'} = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,p$$

mais par hypothèse on a $r \not\equiv 0$. Donc il existe $\xi \in X$, $\xi \neq x_i^*$ $i = 1,2,\ldots,p$ tel que $(r|\delta_\xi)_{H'} \neq 0$.

Considérons $\tilde{r} = r - B\delta_\xi$ $B \in \mathbb{R}$

On a

$$\|\tilde{r}\|^2 = \|r\|^2 - 2B(r|\delta_\xi) + B^2\|\delta_\xi\|^2 = c - 2Bb + B^2 a = \mathcal{P}(B)$$

avec $c \geq 0$, $ab \neq 0$, $a > 0$; on peut donc trouver $B \neq 0$ tel que $\mathcal{P}(B) < \mathcal{P}(0) = \|r\|^2$. Autrement dit on peut trouver un scalaire B, $B \neq 0$ tel que

$$\|\ell - \ell^* - B\delta_\xi\|_{H'}^2 < \|\ell - \ell^*\|_{H'}^2$$

et donc $\ell^* + B\delta_\xi = \sum_{i=1}^{p} A_i^* \delta_{x_i^*} + B\delta_\xi$ est une approximation de ℓ d'ordre p+1 et meilleure que ℓ^*, ce qui contredit l'optimalité de ℓ^*. On a donc nécessairement $p = N$.

———X———

Remarques

(1°) Géométriquement l'existence de ξ tel que $r(\xi) \neq 0$ signifie que la boule $\mathcal{B}$ de centre ℓ, de rayon $\|r\|$, dans H', coupe strictement la variété $L(\delta_{x_i^*} \mid i = 1,2,\ldots p, \delta_\xi)$ alors que $\mathcal{B}$ est tangente à $L(\delta_{x_i^*} \mid i = 1,2,\ldots,p)$

———X———

(2°) On vérifie dans les exemples traités au § IV.5 : approximation de la fonctionnelle intégrale $\ell(\varphi) = \int_X \varphi(t)dt$ dans les espacex $\mathcal{H}_i$ $i = 1,2,3,4$ que les approximations optimales obtenues sont bien d'ordre N.

En fait dire que ℓ^* est d'ordre N, signifie que pour calculer $\ell(\varphi)$ on utilise un maximum d'information sur φ. Ce résultat très intuitif ne peut surprendre.

———X———

(3°) Au lieu de parler de l'approximation de ℓ par $\sum_1^N A_i \delta_{x_i}$, on peut de manière équivalente considérer l'approximation de $h = \Lambda^{-1}(\ell)$, $h \in H$ par $\sum_1^N A_i\, g(.,x_i)$, dans H.

Si ℓ^* est une approximation optimale de ℓ, d'ordre p, alors

$h^* = \Lambda^{-1}(\sum_1^p A_i^* \delta_{x_i^*}) = \sum_1^p A_i^* g(.,x_i^*)$ est une approximation optimale de h et h^* sera dite également d'ordre p.

———X———

(4°) De façon plus précise on peut montrer que les noeuds optimaux appartiennent nécessairement au support de la fonctionnelle étudiée (cf. choix de ξ dans la démonstration du théorème IV.7).

———X———

IV - 8 - CONDITIONS NECESSAIRES D'EXISTENCE D'UNE APPROXIMATION OPTIMALE

Reprenons la formulation (P2) de notre problème. On cherche à minimiser sur $X^N \times \mathbb{R}^N$ la fonction

$$(x,A) \in X^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \Psi^2(h;x,A) = \Big\| h - \sum_{i=1}^{N} A_i (g.,x_i) \Big\|^2$$

$$= \|h\|^2 - \sum_{i=1}^{N} A_i h(x_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} A_i A_j \, g(x_i,x_j) \quad (1)$$

Très fréquemment, tout au moins dans les applications que nous avons pu envisager jusqu'ici, nous avons des fonctions suffisamment régulières vérifiant :

(i) $h \in C^1(X)$

(ii) $x \rightarrow g(x,\alpha)$ est dérivable sur X, sauf éventuellement en $x = \alpha$ (on se souviendra que $g(.,\alpha)$ est souvent solution d'une équation différentielle aux distributions) auquel cas on a

$$\bar{g}'_x(\alpha,\alpha) + \overset{+}{g}'_x(\alpha,\alpha) = \left[\frac{dg(x,x)}{dx}\right](\alpha)$$

où

$$\bar{g}'_x(\alpha,\alpha) = \left[\frac{\partial g(x,\alpha)}{\partial x}\right](\alpha-0) \quad \text{et} \quad \overset{+}{g}'_x(\alpha,\alpha) = \left[\frac{\partial g(x,\alpha)}{\partial x}\right](\alpha+0)$$

En particulier les conditions (ii) sont satisfaites pour tout noyau factorisable $g(x,\alpha) = a(\min(x,\alpha)) * b(\max(x,\alpha))$ avec $a,b \in C^1(X)$.

Supposons les conditions (i) et $(ii)_N$ remplies, et supposons en outre que h admet une approximation optimale $\sum_1^N A_i^* \, g(.,x_i^*)$, approximation d'ordre N ce qui est le seul cas intéressant dans la pratique.

Dans ces conditions, si on écrit les équations normales relatives à (1) on obtient les conditions nécessaires d'optimalité du jeu (x^*, A^*).

$$\text{a)} \quad \sum_{j=1}^{N} A_j^* \, g(x_i^*, x_j^*) = h(x_i^*) \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

$$\text{b)} \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} A_j^* g'_x(x_i^*, x_j^*) + \frac{A_i^*}{2}\left[\bar{g}'_x(x_i^*, x_i^*) + \overset{+}{g}'_x(x_i^*, x_i^*)\right] = h'(x_i^*) \qquad (2)$$

(On a tenu compte pour écrire (2) b) que $\sum_i^N A_i^* \, g(.,x_i^*)$ est d'ordre N, c'est-à-dire $A_i^* \neq 0 \quad i = 1,2,\ldots,N$).

Nous pouvons donner des équations (2) une interprétation géomatrique simple. Posons

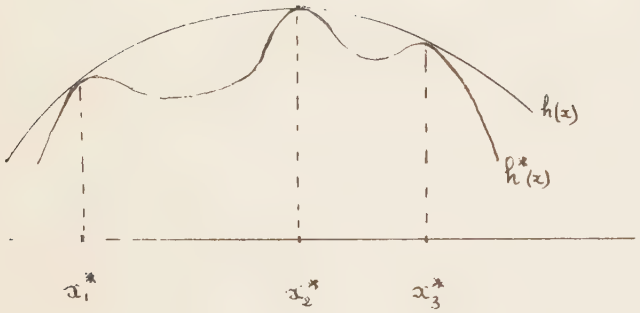
$$h^*(x) = \sum_{i=1}^{N} A_i^* \, g(x, x_i^*) \qquad (3)$$

Les équations (2) a) s'interprètent comme les conditions nécessaires d'orthogonalité $(h - h^* \mid g(.,x_i^*)) = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,N$
lorsqu'on minimise par rapport aux poids seulement.

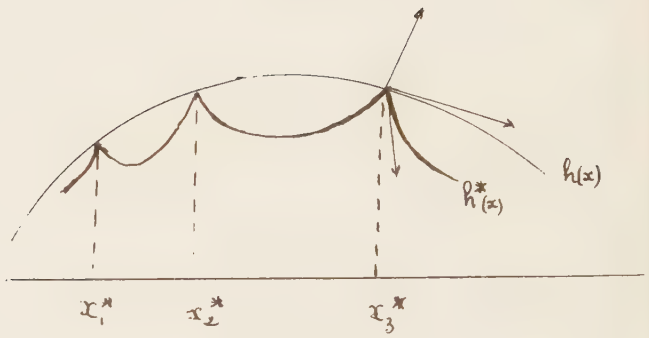
De manière globale les équations (2) s'interprètent ainsi :

* si $g'_x(x,\alpha)$ est continue sur X, $\forall \alpha \in X$ alors les courbes h et h^* sont tangentes en les $x_i^* \quad i = 1,2,\ldots,N$.

* sinon les poids anguleux de $h^*(x)$ se disposent de manière simple par rapport à h(x) :
en x_i^* $(i = 1,2,\ldots,N)$ la pente à la courbe h(x) est égale à la demi somme des pentes à gauche et à droite de $h^*(x)$.



cas g(.,α) dérivable sur X



cas g(.,α) non dérivable en x = α

Ces propriétés géométriques nous ont permis d'élaborer un programme de calcul des noeuds optimaux. C'est ce programme qui nous a permis par exemple de déterminer expérimentalement, l'approximation optimale de la fonctionnelle intégrale dans $\mathcal{H}_2$ (cf. § IV.22). Certes ces résultats expérimentaux n'avaient aucune valeur en eux-mêmes, mais nous ont été d'un précieux concours, pour aborder l'étude théorique du problème.

———X———

Description de l'algorithme dans le cas où $x \to g(x,\alpha)$ n'est pas dérivable en $x = \alpha$

1°) * On part d'un jeu $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_N^{(1)})$ $\quad x_i^{(1)} < x_{i+1}^{(1)} \quad i=1,2,\ldots,N-1$

2°) * A partir du jeu $x^{(v)} = (x_1^{(v)}, \ldots, x_N^{(v)})$

on détermine $\tilde{h}$

$$\tilde{h} = \sum_{i=1}^{N} A_i^{(v)} \, g(.,x_i^{(v)})$$

de manière à satisfaire les relations d'orthogonalité (2) a), c'est-à-dire que l'on résoud le système linéaire

$$\sum_{i=1}^{N} A_i^{(v)} \, g(x_i^{(v)}, x_j^{(v)}) = h(x_j^{(v)}) \qquad j = 1,2,\ldots,N$$

On a alors $\tilde{h}(x_i^{(v)}) = h(x_i^{(v)}) \qquad i = 1,2,\ldots,N.$

3°) * On détermine $m_i = \dfrac{\tilde{h}'^{+}(x_i^{(v)}) + \tilde{h}'^{-}(x_i^{(v)})}{2} \qquad i = 1,2,\ldots,N$

si la droite (D) d'équation $y - h(x_i^{(v)}) = m_i(x - x_i^{(v)})$ n'est pas confondue avec la tangente à $y = h(x)$ en $x_i^{(v)}$ on détermine un point d'intersection $\overline{x_i^{(v)}}$ (distinct de $x_i^{(v)}$) de D avec $y = h(x)$ et on prend

$$x_i^{(v+1)} = \frac{x_i^{(v)} + \overline{x_i^{(v)}}}{2} \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

x^* s'il existe, est alors nécessairement point fixe de l'itération précédente. Nous n'avons pas réussi à montrer la convergence de cet algorithme. Toutefois cette convergence etait acquise expérimentalement dans les quelques exemples que nous avons traités.

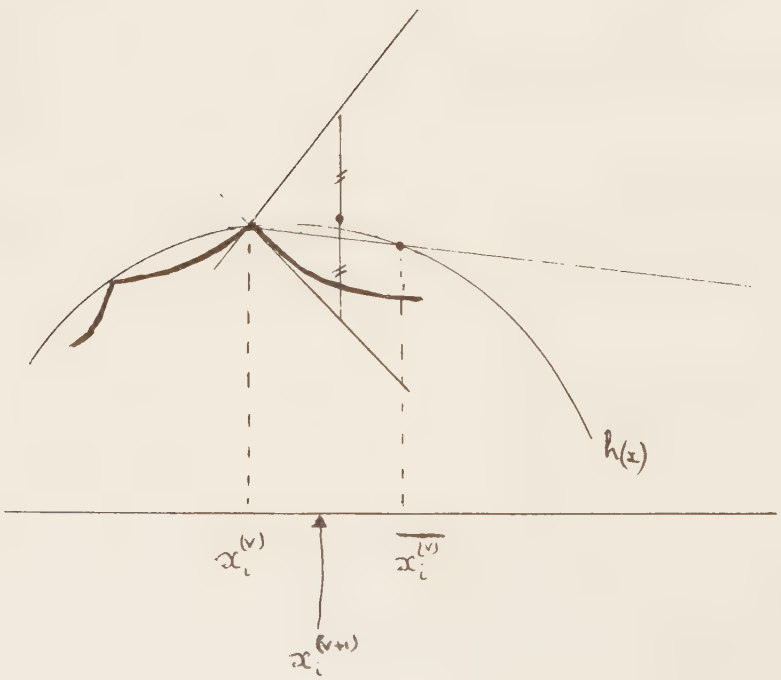
Les résultats obtenus dans le cas de l'approximation dans $H^1_{o(0,1)}$ de la fonctionnelle intégrale

$$\varphi \to \int_o^1 \varphi(t)dt$$

semblaient indiquer que les noeuds optimaux étaient répartis de manière équidistante sur $[0,1]$ $x^*_{i+1}-x^*_i = d = \frac{1}{N+1}$ $i = 1,2,\ldots,N-1$ (ce qui on le sait est effectivement réalisé).

C'est pourquoi nous nous sommes attachés à étudier de façon systématique ce problème, ce qui nous à conduit à l'ensemble des résultats précédents.

———X———



Interprétation géométrique de l'itération

Cas où $g(.,\alpha)$ est dérivable sur X

EXEMPLE (cf. H.S. WILF [42])

$$X =]-1,+1[$$

Dans

$$H = \{\varphi \in \mathbb{R}^X \mid \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \Sigma a_n^2 < +\infty, \quad \|f\|_H^2 = \sum_0^{\infty} a_n^2 \}$$

on considère l'approximation de la fonctionnelle intégrale

$$\varphi \to L(\varphi) = \int_0^1 \varphi(t)dt$$

par des fonctionnelles d'évaluation.

Le noyau de H est $g(x,\alpha) = \frac{1}{1-x\alpha}$ $\qquad x,\alpha \in]-1,+1[$

Le représentant de la fonctionnelle L dans H s'écrit

$$h(x) = \frac{1}{x} \operatorname{Log} \frac{1}{1-x}$$

et des considérations précédentes il ressort alors que si

$\left\| \begin{matrix} x_i^* \\ A_i^* \end{matrix} \right.$ $i = 1,2,\ldots,N$; $x_i^* \in [0,1[$, minimisent la norme de la fonctionnelle erreur

$$R : \varphi \to R(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{i=1}^{N} A_i^* \varphi(x_i^*)$$

les courbes

$$\left| \begin{array}{l} h(x) = \frac{1}{x} \operatorname{Log} \frac{1}{1-x} \\ \\ \tilde{h}(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i^*}{1-xx_i^*} \end{array} \right.$$

sont tangentes en x_i^* $\qquad i = 1,2,\ldots,N.$

Les valeurs déterminées expérimentalement par H.S. WILF, pour N = 3, sont les suivantes :

$$\left|\begin{array}{l} x_1^* = 0.37903 \\ x_2^* = 0.89813 \\ x_3^* = 0.99378 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} A_1^* = 0.72048 \\ A_2^* = 0.24302 \\ A_3^* = 0.02002 \end{array}\right. \qquad \|R\|^{*2} = 0.0044$$

X

Cas où $\delta'_\alpha \in H'$

Nous supposons ici que

$$\forall \alpha \in X \quad \delta'_\alpha : \varphi \in H \to \varphi(\alpha)$$

est une fonctionnelle linéaire continue sur H.
Si l'on pose par analogie avec l'écriture $g(.,\alpha) = \Lambda^{-1}(\delta_\alpha)$,

$$\bar{g}(.,\alpha) = \Lambda^{-1}(\delta'_\alpha)$$

les conditions nécessaires d'optimalité (2) peuvent s'écrire ici :

$$\left|\begin{array}{l} (h-h^* \mid g(.,x_i^*)) = 0 \\ (h-h^* \mid \bar{g}(.,x_i^*)) = 0 \end{array}\right. \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

ce qui signifie que $h^* = \sum_{i=1}^{N} A_i^* g(.,x_i^*)$, est la projection orthogonale de h sur la variété de dimension 2N engendrée par $g(.,x_1^*),\ldots,g(.,x_N^*)$, $\bar{g}(.,x_1^*),\ldots,\bar{g}(.,x_N^*)$, et par conséquent cette projection ne dépend pas des $\bar{g}(.,x_i^*)$ $i = 1,2,\ldots,N$. Nous énoncerons :

Théorème IV.8

Si $\delta'_\alpha \in H'$ $\forall \alpha \in X$, une condition nécessaire pour que $\sum_{i=1}^{N} A_i^* g(.,x_i^*)$ soit une approximation optimale de h, $h \in H$, est que $x^* = (x_1^*,\ldots,x_N^*)$ soit solution du système d'équations non linéaire

$$\beta_i = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,N \qquad (\beta_i = \beta_i(x) \quad i = 1,2,\ldots,N)$$

où $\sum_{1\leq i\leq N} [\alpha_i\, g(.,x_i) + \beta_i\, \bar{g}(.,x_i)]$ est la projection orthogonale de H sur $L(g.,x_1),\ldots,g(.,x_N),\bar{g}(.,x_1),\ldots,\bar{g}(.,x_N))$.

Exemple :
On considère :

$$H = \{\varphi |\ \varphi,\varphi',\varphi'' \in L^2(0,1)\ ;\ \varphi(0)=\varphi'(0) = 0\ ;\ (\varphi|\Psi)_H = (\varphi''|\Psi'')_{L^2(0,1)}\}$$

L'application du théorème IV.8, conduit à expliciter les fonctions v_i $i = 1,2,\ldots,N$ (ce sont encore des splines de base cf. § IV.3) pour lesquelles $\beta_i = (h|v_i)$ $\quad i = 1,2,\ldots,N$.

Si l'on explicite (cf. [21]) ces fonctions pour la fonctionnelle intégrale dans H.

$$\varphi \to \int_0^1 \varphi(x)\,dx$$

alors les conditions $\beta_i = 0$ $\quad i = 1,2,\ldots,N$ ne se trouvent vérifiées qu'en un seul point de $[0,1]^N$

$$x_i^* = id \qquad i=1,2,\ldots,N \qquad\qquad d = \frac{1}{N+\frac{1}{\sqrt{6}}}$$

et les poids correspondants sont

$$A_i^* = d \quad i = 1,2,\ldots,N-1 \qquad A_N^* = d\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

La formule

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \simeq \frac{1}{N+\frac{1}{\sqrt{6}}} \sum_{i=1}^{N-1} \varphi\left(\frac{i}{N+\frac{1}{\sqrt{6}}}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \varphi\left(\frac{N}{N+\frac{1}{\sqrt{6}}}\right)$$

est donc la seule susceptible à être optimale. On peut par un raisonnement direct montrer qu'il en est bien ainsi.

———X———

Remarques

1) Les hypothèses du théorème IV.4 ne sont pas vérifiées dans l'exemple ci-dessus.

2) Le système $\beta_i = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,N$ du théorème IV.8 fait penser à l'obtention des formules classiques de GAUSS. Pour trouver les abscisses de GAUSS relatives à l'approximation de la fonctionnelle intégrale on est conduit à écrire que la formule d'approximation

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{N} A_i f(x_i) + \sum_{i=1}^{N} B_i f'(x_i)$$

est exacte sur les polynômes de degré au plus égal à 2N-1, puis à ajuster les noeuds $x_i \quad i = 1,2,\ldots,N$ de manière à avoir

$$B_i = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,N.$$

De ce point de vue, les formules optimales du type précécent pourront donc être dites "gaussiennes".

En ce qui concerne le théorème IV.8, on pourra voir une présentation plus générale dans [11].

———X———

IV.9 - ETUDE DETAILLEED'UNE FORMULE OPTIMALE POUR L'APPROXIMATION D'UNE INTEGRALE AVEC SINGULARITE A L'ORIGINE

On prend comme espace hilbertien $H = H_{(\alpha,\beta)}$ avec $(\alpha,\beta) = [0,1]$

$$H : \{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \varphi,\varphi' \in L^2_{(0,1)} \; ; \; \varphi(0) = 0 \; ; \; (\varphi|\Psi)_H = \int_0^1 \varphi'(x)\Psi'(x)dx\}$$

On veut étudier la fonctionnelle L

$$\varphi \in H \to L(\varphi) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

1°) L est linéaire continue sur H

On peut en effet écrire

$$\int_A^1 \frac{\varphi(x)}{x} = \varphi(x) \text{ Log } x \Big|_A^1 - \int_A^1 \varphi'(x) \text{ Log } x \, dx$$

or pour φ dans H on a

$$|\varphi(x)| = |(\varphi| g(.x))| \leq \|\varphi\| \, x^{1/2} \text{ et } \left|\frac{\varphi(x)}{x^{1/2}}\right| \leq \|\varphi\|$$

d'où $\varphi(x)\ \mathrm{Log}\ x = \dfrac{\varphi(x)}{x^{1/2}}\, x^{1/2}\ \mathrm{Log}\ x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

D'autre part $\log x \in L^2_{(0,1)}$ et donc

$$\lim_{A\to 0} \int_A^1 \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = -\int_0^1 \varphi'(x)\ \mathrm{Log}x\ dx = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

et

$$\left|\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x}\, dx\right|^2 \leq \|\mathrm{Log}x\|^2_{L^2_{(0,1)}}\ \|\varphi\|^2_H$$

2°) Formules d'approximations optimales de L

D'après le théorème IV.6.2. quel que soit $N \geq 1$, il existe un jeu au moins de noeuds x_i^* $i = 1,2,\ldots,N$ et un jeu de poids A_i^* $i = 1,2,\ldots,N$ pour lesquels la fonctionnelle erreur

$$R(\varphi) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x}\, dx - \sum_{i=1}^{N} A_i\ \varphi(x_i)$$

est de norme minimale dans H'.

D'après le théorème IV.7, on est assuré que quel que soit N la formule optimale est d'ordre N.

Nous allons déterminer cette formule optimale, en déterminant le représentant h dans H de L, et en écrivant les équations normales (2), §§ III.4.8.

On a :

$$\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = -\int_0^1 \varphi'(x)\,\mathrm{Log}x\,dx$$

$$= -\int_0^1 \varphi'(x)\,[x\mathrm{Log}x - x]'\,dx$$

$$= (\varphi \mid x - x\mathrm{Log}x)_H$$

Autrement dit

$$\boxed{h = x - x\mathrm{log}x}$$

h est dérivable sur $]0,1]$ et à l'optimum cherché on a nécessairement

$$(S)\quad \begin{cases} h'(x_1) = \frac{1}{2}\left[\frac{h(x_1)}{x_1} + \frac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}\right] \\ h'(x_i) = \frac{1}{2}\left[\frac{h(x_{i+1})-h(x_i)}{x_{i-1}-x_i} + \frac{h(x_{i+1})-h(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\right] \\ h'(x_N) = \frac{1}{2}\left[\frac{h(x_{N-1})-h(x_N)}{x_{N-1}-x_N}\right] \end{cases}$$

C'est ce système non linéaire de N équations à N inconnues, que nous voulons résoudre. Nous sommes assurés à priori de l'existence d'une solution.

Etude de (S)

Posons $A = \dfrac{h(\alpha)-h(\beta)}{\alpha-\beta}$

On a

$$A = \frac{\alpha-\alpha\mathrm{Log}\alpha-\beta+\beta\mathrm{Log}\beta}{\alpha-\beta} = 1 - \frac{\alpha\mathrm{Log}\alpha-\beta\mathrm{Log}\alpha+\beta\mathrm{Log}\alpha-\beta\mathrm{Log}\beta}{\alpha-\beta}$$

ou encore

$$\boxed{A = 1-\text{Log}\alpha - \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}-1}\,\text{Log}\,\frac{\alpha}{\beta}}$$

La première équation de (S) s'écrit alors compte tenu que $h'(x) = -\text{Log}x$

$$\text{Log}x_1 = \frac{1}{2}\left(\text{Log}x_1 - 1 - 1 + \text{Log}x_1 + \frac{1}{\frac{x_1}{x_2}-1}\,\text{Log}\,\frac{x_1}{x_2}\right)$$

soit

$$\boxed{\frac{1}{\frac{x_1}{x_2}-1}\,\text{Log}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = 2}$$

La ième équation de (S) donne $2 \leq i \leq N-1$

$$\text{Log}x_i = \frac{1}{2}\left[-1+\text{Log}x_{i-1} + \frac{1}{\frac{x_{i-1}}{x_i}-1}\,\text{Log}\left(\frac{x_{i-1}}{x_i}\right)\right.$$
$$\left.-1+\text{Log}x_i + \frac{1}{\frac{x_i}{x_{i+1}}-1}\,\text{Log}\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)\right]$$

Soit

$$2\text{Log}x_i + 2 = \text{Log}x_{i-1} + \text{Log}x_i + \frac{1}{\frac{x_{i-1}}{x_i}-1}\,\text{Log}\left(\frac{x_{i-1}}{x_i}\right) + \frac{1}{\frac{x_i}{x_{i+1}}-1}\,\text{Log}\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)$$

ou

$$\boxed{\frac{\frac{x_{i-1}}{x_i}}{\frac{x_{i-1}}{x_i}-1}\,\text{Log}\left(\frac{x_{i-1}}{x_i}\right) + \frac{1}{\frac{x_i}{x_{i+1}}-1}\,\text{Log}\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) = 2 \qquad i = 2,3,\ldots,N-1}$$

Enfin la dernière équation de (S) se réécrit :

$$\mathrm{Log}x_N = \frac{1}{2}\left(-1+\mathrm{Log}x_{N-1} + \frac{1}{\frac{x_{N-1}}{x_N}-1}\,\mathrm{Log}\left(\frac{x_{N-1}}{x_N}\right)\right)$$

soit

$$1+2\mathrm{Log}x_N = \mathrm{Log}x_{N-1} + \frac{1}{\frac{x_{N-1}}{x_N}-1}\,\mathrm{Log}\left(\frac{x_{N-1}}{x_N}\right)$$

ou

$$\boxed{1+\mathrm{Log}x_N = \frac{\frac{x_{N-1}}{x_N}}{\frac{x_{N-1}}{x_N}-1}\,\mathrm{Log}\left(\frac{x_{N-1}}{x_N}\right)}$$

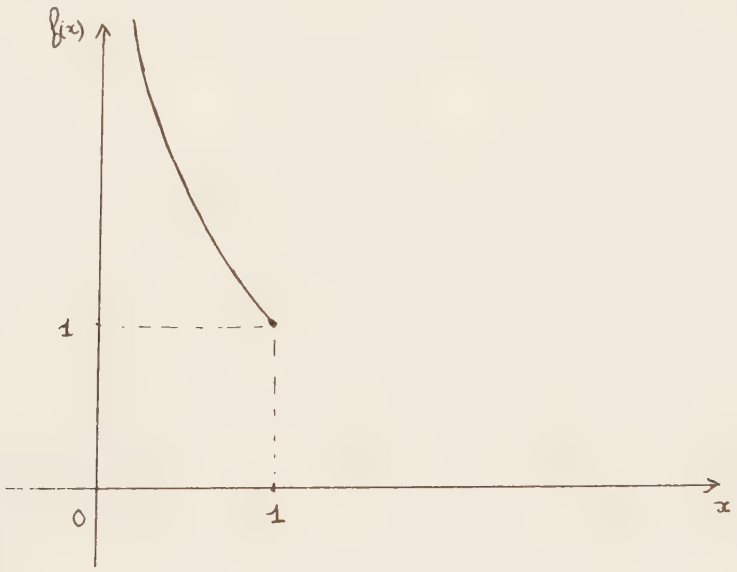
Posons $\lambda_i = \dfrac{x_i}{x_{i+1}}$ $\quad i = 1,2,\ldots,N-1$

Le système (S) devient :

$$(S')\qquad \begin{cases} 2 = \dfrac{\mathrm{Log}\lambda_1}{\lambda_1 - 1} \\ 2 = \dfrac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{i-1}-1}\,\mathrm{Log}\lambda_{i-1} + \dfrac{1}{\lambda_i - 1}\,\mathrm{Log}\lambda_i & i = 2,3,\ldots,N-1 \\ 1+\mathrm{Log}x_N = \dfrac{\lambda_{N-1}}{\lambda_{N-1}-1}\,\mathrm{Log}\lambda_{N-1} \end{cases}$$

Etudions la fonction $f(x) = \frac{\log x}{x-1}$ $\quad x \in]0,1]$

Son graphe a l'allure ci-dessous :



avec $f'(1) = -\frac{3}{2}$; f' étant strictement négatif sur $]0,1]$. Ainsi quel que soit u, $u \in [1,+\infty[$, l'équation $f(x) = u$ admet une et une seule racine.

On obtient donc en résolvant $f(x) = 2$, la solution $x = \lambda_1$.
Notons alors $u_1 = 2$.

On a donc $f(\lambda_1) = u_1$ et en reportant dans la 2ème équation de (S')

$$f(\lambda_2) = 2-\lambda_1 u_1 = u_2$$

et de manière générale en posant $u_i = 2-\lambda_{i-1}u_{i-1}$

$$f(\lambda_i) = u_i \qquad i = 1,2,3,\ldots,N-1$$

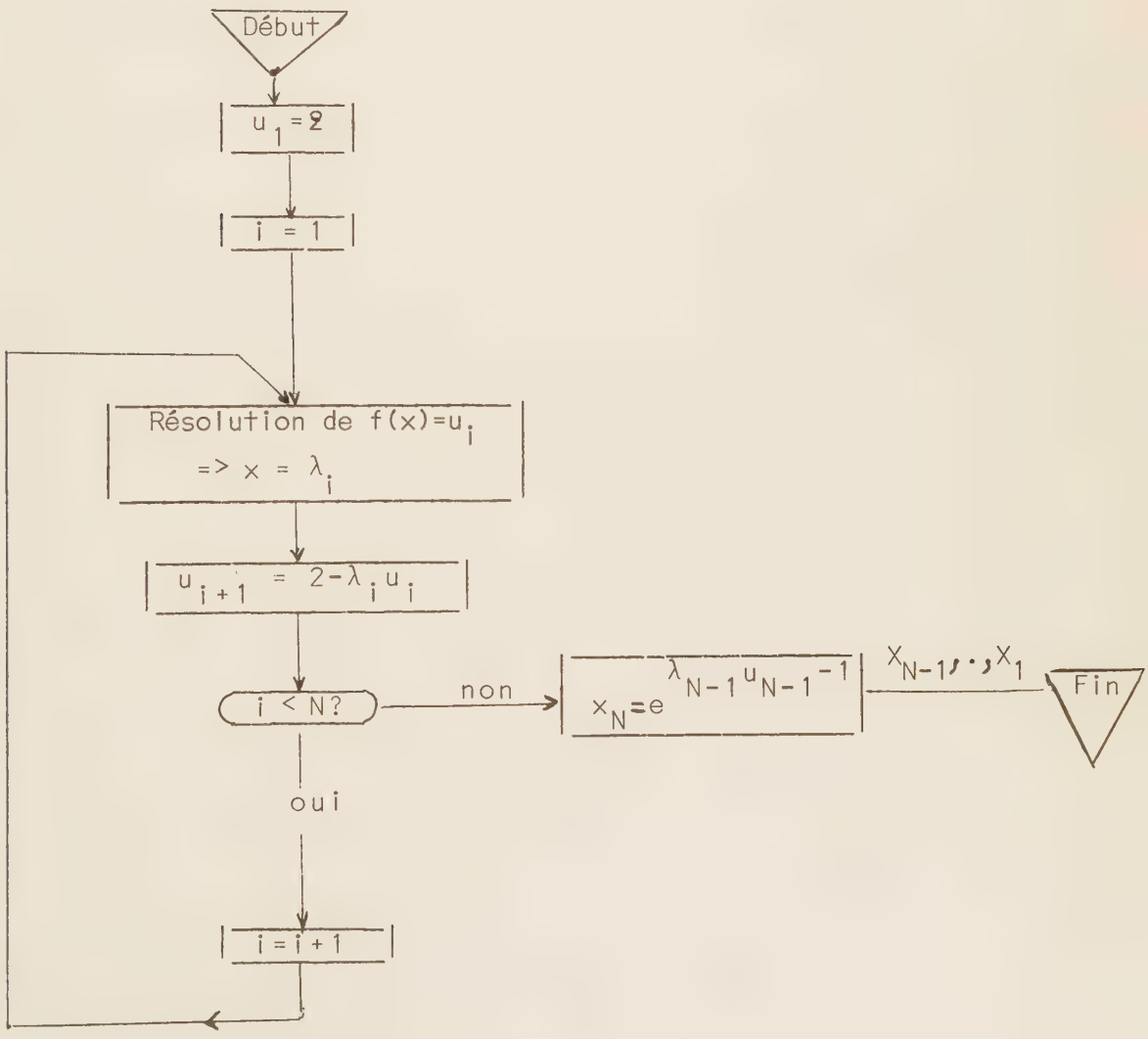
Enfin la dernière équation s'écrit

$$Log(x_N) = \lambda_{N-1} f(\lambda_{N-1}) - 1 = \lambda_{N-1} u_{N-1} - 1$$

d'où

$$x_N = e^{\lambda_{N-1} u_{N-1} - 1}$$

et on a l'organigramme de calcul des λ_i $\quad i = 1,2,\ldots,N$



Nous savons à priori puisque la formule optimale existe, que ce procédé est satisfaisant, c'est-à-dire qu'il détermine un jeu d'abscisses toutes distinctes dans $]0,1]$. $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N \leq 1$.
Vérifions le directement.
Nous allons pour cela démontrer le

Lemme

Si $1 < k \leq 2$ et si $\bar{x}$ est solution de $\frac{\mathrm{Log}x}{x-1} = k$, ($\bar{x} \in]0,1[$ nécessairement) alors on a

$$0 < \bar{x}k < 1$$

$$(1+\bar{x})k > 2$$

Démonstration :
On a déjà $\bar{x}k > 0$.
De plus

$$\mathrm{Log}\bar{x} = \bar{x}k - k = \bar{x}k - \frac{\mathrm{Log}\bar{x}}{\bar{x}-1}$$

d'où

$$\bar{x}k = \frac{\bar{x}-}{\bar{x}-1}\,\mathrm{Log}\,\bar{x}$$

Or pour $x \in]0,1]$ on a $\frac{x\mathrm{Log}x}{x-1} < 1$

donc

$$\boxed{0 < \bar{x}k < 1 \qquad \text{pour } 1 < k \leq 2}$$

D'autre part

$$(1+\bar{x})k = k+\bar{x}k = \frac{\mathrm{Log}\bar{x}}{\bar{x}-1} + \frac{\bar{x}}{\bar{x}-1}\,\mathrm{Log}\bar{x} = (1+\frac{2}{\bar{x}-1})\mathrm{Log}\bar{x}$$

Or l'étude de la fonction $x \to (1+\frac{2}{x-1})\mathrm{Log}x$ dans $]0,1]$ montre que cette fonction est strictement décroissante, et on a $(1+\frac{2}{x-1})\mathrm{Log}x > \lim_{x\to 1}(1+\frac{2}{x-1})\mathrm{Log}x = 2$

Donc

$$\boxed{1+\bar{x}k > 2 \quad \text{pour } 1 < k \leq 2}$$

———X———

L'équation $f(\lambda_1) = u_1 = 2$ admet une unique racine λ_1, $\lambda_1 \in]0,1[$.
D'après le lemme on a donc $\begin{cases} 0 < \lambda_1 u_1 < 1 \\ (1+\lambda_1)u_1 > 2 \end{cases}$

donc

$$u_2 = 2-\lambda_1 u_1 \text{ vérifie } 1 < u_2 < 2 = u_1$$

On peut donc résoudre $f(\lambda_2) = u_2$ et on obtient

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$$

Supposons que l'on soit arrivé à

$$\begin{cases} 1 < u_{p-1} < u_{p-2} < \ldots < u_2 < u_1 = 2 \\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{p-1} < 1 \end{cases}$$

On a alors $u_p = 2-\lambda_{p-1}u_{p-1}$.
Donc puisque $1 < u_{p-1} < 2$ on a d'après le lemme

$$\begin{cases} 0 < \lambda_{p-1}u_{p-1} < 1 \\ (1+\lambda_{p-1})u_{p-1} > 2 \end{cases}$$

d'où

$$1 < u_p < u_{p-1} \text{ et donc } \lambda_{p-1} < \lambda_p < 1.$$

On a donc finalement la possibilité de déterminer λ_i $i = 1,2,\ldots,N-1$ avec

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 < u_{N-1} < u_{N-2} < \ldots < u_2 < u_1 = 2 \\ \\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{N-2} < \lambda_{N-1} < 1 \end{array}}$$

Il reste à déterminer x_N et montrer que $0 < x_N < 1$ (car $\lambda_N = x_N$).
Or λ_N est solution de $\mathrm{Log} x_N = \lambda_{N-1} u_{N-1}^{-1}$
Or $\lambda_{N-1} u_{N-1}^{-1} < 0 \Rightarrow 0 < x_N < 1$.

Calcul des noeuds optimaux

Les λ_i étant calculés $i = 1,2,\ldots,N-1$ on a

$$\left\| \begin{array}{l} x_N^* = e^{\lambda_{N-1} u_{N-1}^{-1}} \\ \\ x_i^* = \lambda_i x_{i+1} \end{array} \right. \qquad i = N-1, N-2, \ldots, 1$$

qui vérifient $0 < x_1^* < x_2^* < \ldots < x_N^* < 1$ et il y a donc unicité de la formule optimale.

Calcul des poids optimaux

On sait calculer ces poids par résolution d'un système à matrice très simple. On obtient sans grande difficulté les relations :

$$A_1^* = \frac{h(x_1^*)}{x_1^*} - \frac{h(x_1^*)-h(x_2^*)}{x_1^* - x_2^*}$$

$$A_i^* = \frac{h(x_{i-1}^*)-h(x_i^*)}{x_{i-1}^*-x_i^*} - \frac{h(x_i^*)-h(x_{i+1}^*)}{x_i^* - x_{i+1}^*} \qquad i = 2,3,\ldots,N-1$$

$$A_N^* = \frac{h(x_{N-1}^*)-h(x_N^*)}{x_{N-1}^* - x_N^*}$$

ce qui s'explicite très simplement :

$$A_1^* = 2\,\frac{h(x_1^*)}{x_1^*} - 2\ \mathrm{Log}\ x_1^* = 2$$

$$A_i^* = -2\ \mathrm{Log}x_i^* + 2\times(-1+\mathrm{Log}x_i^* + \frac{1}{\frac{x_i^*}{x_{i+1}^*}-1}\ \mathrm{Log}\ \frac{x_i^*}{x_{i+1}^*}\ )$$

$$= 2u_i - 2 \qquad 2 \leq i \leq N-1$$

et enfin $A_N^* = -2\mathrm{Log}x_N^* = 2(1-\lambda_{N-1}u_{N-1})$

$$\boxed{\begin{array}{l} A_1^* = 2 = \|\mathrm{Log}x\|_{L^2(0,1)} \\ A_i^* = 2(u_i - 1) \qquad 2 \leq i \leq N-1 \\ A_N^* = 2(1-\lambda_{N-1}u_{N-1}) \end{array}}$$

Il se passe donc le phénomène curieux suivant :

$A_1^* \ldots A_N^*$ sont les N premiers termes d'une suite fixe

$$\{\alpha_i\}_{i = 1,2\ldots} \qquad \alpha_i = 2(u_i - 1)$$

suite que l'on peut déterminer jusqu'à un rang aussi élevé qu'on le désire une fois pour toutes, ainsi que la suite

$$\{\lambda_i\} \qquad i = 1,2\ldots$$

Si ces deux suites sont calculées jusqu'au rang P, on a immédiatement n'importe quelle formule optimale utilisant N points, $N \leq P$, en prenant

$$\left|\begin{array}{ll} x_N^* = e^{\frac{\lambda_{N-1}(\alpha_{N-1}+2)}{2}} - 1 & \\ x_i^* = \lambda_i x_{i+1}^* & i = N-1, N-2, \ldots, 1 \\ A_i^* = \alpha_i & i = 1,2,\ldots,N \end{array}\right.$$

Résultats numériques :

On peut calculer aisément par une méthode de point fixe le zéro de $f(x) = k$. Nous donnons ci-dessous les premières valeurs des suites λ_i, A_i $i = 1,2\ldots$ les noeuds optimaux pour quelques valeurs de N ainsi que l'erreur relative RMIN, correspondante.

+1	+2.031873688881542'-01	+2.000000000000000'+00
+2	+3.614677519652069'-01	+1.187250524447383'+00
+3	+4.704621586807944'-01	+8.479117179780776'-01
+4	+5.485703955381263'-01	+6.601653054277032'-01
+5	+6.069345441413289'-01	+5.407120662047240'-01
+6	+6.520840361580042'-01	+4.579540803036614'-01
+7	+6.880036966197839'-01	+3.972073826245528'-01
+8	+7.172395870594239'-01	+3.507124591900705'-01
+9	+7.414877251723237'-01	+3.139759664750708'-01
+10	+7.619184164538746'-01	+2.842152245149703'-01
+11	+7.793832637229970'-01	+2.596143532977218'-01
+12	+7.944294549947515'-01	+2.389395828585581'-01
+13	+8.075769475040909'-01	+2.213204474234987'-01
+14	+8.191334315624701'-01	+2.061261415639937'-01
+15	+8.293847063870872'-01	+1.928883232010139'-01
+16	+8.385344868804282'-01	+1.812519619222548'-01
+17	+8.467569388822483'-01	+1.709450053525945'-01
+18	+8.541694722626408'-01	+1.617502784559623'-01
+19	+8.609008079230405'-01	+1.534989054876537'-01
+20	+8.670359190308278'-01	+1.460510524042951'-01
+21	+8.726497310709186'-01	+1.392966534915665'-01
+22	+8.776857644204610'-01	+1.331433506496680'-01
+23	+8.822576500282894'-01	+1.275144704645443'-01
+24	+8.863509802249664'-01	+1.223458285456305'-01
+25	+8.900238235957042'-01	+1.175832869950844'-01
+26	+8.934099230004277'-01	+1.131828428392798'-01
+27	+8.983392098906882'-01	+1.091030231131587'-01
+28	+9.016359850038037'-01	+1.053100566384626'-01
+29	+9.047224655094085'-01	+1.017766933443656'-01
+30	+9.076179696907478'-01	+9.847540804727339'-02
+31	+9.103367487591802'-01	+9.538601070216978'-02
+32	+9.128999855153579'-01	+9.248892084989623'-02
+33	+9.153161212425506'-01	+8.976689446508245'-02
+34	+9.175990374836189'-01	+8.720267185712993'-02
+35	+9.197585596413133'-01	+8.478483727065943'-02
+36	+9.218043351053501'-01	+8.250130090988783'-02
+37	+9.237450338970666'-01	+8.034127295873360'-02
+38	+9.255884749648424'-01	+7.829508029326781'-02
+39	+9.273407693588069'-01	+7.635402610441888'-02
+40	+9.290084590736424'-01	+7.451225997107169'-02
+41	+9.305982982034070'-01	+7.276056203489522'-02
+42	+9.321155673327522'-01	+7.109254838718870'-02
+43	+9.335641404793163'-01	+6.950239426143988'-02
+44	+9.349485571808150'-01	+6.798677608143099'-02
+45	+9.362728678787549'-01	+6.653872675379268'-02
+46	+9.375408656733296'-01	+6.515585971971526'-02
+47	+9.387559511354005'-01	+6.383198752802820'-02
+48	+9.399213695576421'-01	+6.256543956446147'-02
+49	+9.410399991067698'-01	+6.135066724231075'-02

Premières valeurs des suites

λ_i et A_i (poids optimaux).

Noeuds optimaux pour quelques valeurs de N

N=2

1.122247200996460'-01
5.523213412021827'-01

RMIN=
4.895029999535493'-01

N=3

4.806672963752875'-02
2.365635713500740'-01
6.544527694781615'-01

RMIN=
3.690198479550882'-01

N=4

2.483921617102632'-02
1.222478361078598'-01
3.381984573816886'-01
7.188643148898912'-01

RMIN=
2.961438202015459'-01

N=5

1.446469214537622'-02
7.118893376358649'-02
1.969440797320111'-01
4.186193226388594'-01
7.631077543442914'-01

RMIN=
2.473059188661268'-01

N=10

2.381283981552743'-03
1.171964573675609'-02
3.242238255844235'-02
6.891602642252196'-02
1.256284097411382'-01
2.069883992496639'-01
3.174259570426124'-01
4.613724586105437'-01
6.432612852590895'-01
8.675278948273803'-01

RMIN=
1.355620346172186'-01

N=20

3.448117345220348'-04
1.697013630369114'-03
4.694785692894639'-03
9.979093124214951'-03
1.819108943060233'-02
2.997207788912143'-02
4.596352038567468'-02
6.680708346698870'-02
9.314472412334050'-02
1.256187000286396'-01
1.648715890256269'-01
2.115465235531372'-01
2.662873616066196'-01
3.297386594077181'-01
4.025457229584103'-01
4.853546488841762'-01
5.788129844126326'-01
6.835693446962023'-01
8.002736774067450'-01
9.295771011499442'-01

RMIN=
7.123964771910423'-02

N=50

2.387021967159322'-05
1.174788561031702'-04
3.250050812678807'-04
6.960208774521108'-04
1.259311262640123'-03
2.074871622971729'-03
3.181908324572101'-03
4.624841901584345'-03
6.448112994634766'-03
8.696183059721195'-03
1.141353571711132'-02
1.464465297999648'-02
1.843422708954470'-02
2.282675862290268'-02
2.786696006212491'-02
3.359955862161623'-02
4.006938193635368'-02
4.732133157035193'-02
5.540040133370808'-02
6.435166609654353'-02
7.422030008684736'-02
8.505165067290395'-02
9.689119634462206'-02
1.097845521383406'-01
1.237774742754045'-01
1.389160098726694'-01
1.552463895425565'-01
1.728148875539421'-01
1.916681348440336'-01
2.118529628156342'-01
2.334164482087311'-01
2.564061438963078'-01
2.808699178054639'-01
3.068556439541131'-01
3.344114710447166'-01
3.635861471896821'-01
3.944287668685448'-01
4.269887819635046'-01
4.613160097739152'-01
4.974611545364105'-01
5.354753766531385'-01
5.754097957055323'-01
6.173159379284408'-01
6.612464116405484'-01
7.072543184214176'-01
7.553933716180325'-01
8.057178084456952'-01
8.582825040635968'-01
9.131428775446744'-01
9.703550097865582'-01

RMIN=
2.958489821726184'-02

Contrôles des résultats obtenus

Nous avons calculé numériquement des valeurs approchées de

$$I(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha}$$

pour quelques valeurs de α , en utilisant :

Méthode A :

La formule d'approximation optimale de $\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx$ avec $f(x) = x^{\alpha}$ ($f \in H_{(0,1)}$ si $\alpha > \frac{1}{2}$) utilisant N noeuds (N = 20, 30, 40, 50).

Méthode B :

Une formule mixte trapèzes-rectangle

$$\int_0^1 g(x)dx \simeq \frac{1}{2(N+1)} \left[3g\left(\frac{1}{N+1}\right) + g(1) + 2 \sum_{i=2}^{N} g\left(\frac{i}{N+1}\right)\right]$$

qui consiste à prendre

$$\int_0^{\frac{1}{N+1}} g(x)dx \simeq \frac{1}{N+1} g\left(\frac{1}{N+1}\right)$$

et à évaluer $\int_{\frac{1}{N+1}}^1 g(x)\,dx$ par la formule classique des trapèzes. ($g(x) = x^{\alpha-1}$) .

α	$I(\alpha)$	N	(méthode A)	(méthode B)
5	0.2	+20	+1.951716755391295'-01	+2.007558089283296'-01
		+30	+1.977572739580127'-01	+2.003468422797448'-01
		+40	+1.987039590764578'-01	+2.001982871853358'-01
		+50	+1.991506984710134'-01	+2.001281523594920'-01
2	0.5	+20	+4.974631840132949'-01	+5.011337868480721'-01
		+30	+4.988275770431462'-01	+5.005202913631630'-01
		+40	+4.993232185186042'-01	+5.002974419988098'-01
		+50	+4.995562781082412'-01	+5.001922337562471'-01
1	1	+20	+9.974599581068851'-01	+9.999999999999997'-01
		+30	+9.988268889483760'-01	+9.999999999999997'-01
		+40	+9.993229893468914'-01	+9.999999999999997'-01
		+50	+9.995561796199755'-01	+9.999999999999997'-01
0.9	1.111...	+20	+1.108187698560354'+00	+1.104439514907860'+00
		+30	+1.109760143424779'+00	+1.106416789647127'+00
		+40	+1.110331851244007'+00	+1.107462895872396'+00
		+50	+1.110601008284439'+00	+1.108114386752517'+00
0.8	1.25	+20	+1.246211213255515'+00	+1.229483923336928'+00
		+30	+1.248235092644104'+00	+1.234986509767220'+00
		+40	+1.248978293073382'+00	+1.237999455938113'+00
		+50	+1.249330781910769'+00	+1.239923975799540'+00
0.75	1.333...	+20	+1.328732933801435'+00	+1.301351165778570'+00
		+30	+1.331166495542153'+00	+1.309466004278129'+00
		+40	+1.332070735788200'+00	+1.313986011921764'+00
		+50	+1.332503357465350'+00	+1.316909872427847'+00
0.6	1.666...	+20	+1.655289184293004'+00	+1.564425693905076'+00
		+30	+1.660842796497257'+00	+1.585756220583500'+00
		+40	+1.663074102443187'+00	+1.598261170746742'+00
		+50	+1.664206347677465'+00	+1.606661857481603'+00
0.5	2	+20	+1.973125245578716'+00	+1.790338996350585'+00
		+30	+1.984877767930763'+00	+1.827471883597606'+00
		+40	+1.990013284344950'+00	+1.849993037700662'+00
		+50	+1.992789689125949'+00	+1.865507451675935'+00

On constate que pour $\alpha > 1$ la méthode B est meilleure que la méthode A ; c'est l'inverse qui se produit pour $\alpha < 1$. Ce phénomène s'explique bien puisque pour $\alpha < 1$, la fonction $x^{\alpha-1}$ a une branche infinie.

CHAPITRE V

GENERALISATION D'UN THEOREME D'ARONSZAJN

- APPLICATIONS -

Introduction.

Dans le chapitre 1, nous avons montré (théorème de N. ARONSZAJN) qu'il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des fonctions symétriques, définies positives ou nulles sur X, et l'ensemble des espaces hilbertiens, inclus dans $\mathbb{R}^X$, et admettant un noyau reproduisant.

L'objet de ce chapitre est de généraliser le théorème d'ARONSZAJN. Nous verrons ensuite quelques applications.

V.1 Retour sur le théorème d'ARONSZAJN.

X désigne toujours une partie de $\mathbb{R}$.
Le théorème I.4.2 peut s'énoncer sous la forme suivante :

Théorème V.1.

Soit $g : (a,b) \in X \times X \to g(a,b) \in \mathbb{R}$.
Pour qu'il existe un espace hilbertien réel H, $H \subset \mathbb{R}^X$ tel que :

1) $g(a,.) \in H \qquad \forall a \in X$

2) $(g(a,.)|g(b,.))_H = g(a,b) \qquad \forall (a,b) \in X \times X$

il faut et il suffit que la fonction g soit symétrique, définie positive ou nulle sur X.

Si un tel espace H existe, alors g est le noyau reproduisant de H.

Cette formulation, on va le voir, est apte à généralisation.

Nous allons devoir considérer dorénavant plusieurs espaces hilbertiens à noyaux reproduisants. Aussi nous conviendrons de noter $H = H_g$ un espace hilbertien de noyau reproduisant g.

V.2 Généralisation du théorème d'ARONSZAJN.

Soient X et Y deux parties de $\mathbb{R}$.
On considère deux fonctions φ et d définies respectivement sur $X \times Y$ et $X \times X$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\varphi : (x,y) \in X \times Y \to \varphi(x,y) \in \mathbb{R}$$

$$d : (x_1,x_2) \in X \times X \to d(x_1,x_2) \in \mathbb{R}$$

avec $d(x_1,x_2) = d(x_2,x_1) \quad \forall (x_1,x_2) \in X \times X$.

On s'intéresse au problème suivant :

" **Existe-t-il un espace hilbertien réel H , $H \subset \mathbf{R}^Y$, vérifiant**

I) $\varphi(x,.) \in H \quad \forall x \in X$

II) $(\varphi(x_1,.)|\varphi(x_2,.))_H = d(x_1,x_2) \quad \forall (x_1,x_2) \in X \times X$ **?**

Si oui H admet-il un noyau reproduisant ? Lequel ? "

On voit que le cas $\left| \begin{array}{l} Y = X \\ \varphi = d \end{array} \right.$ est traité par le théorème V.1.
et c'est bien d'une généralisation du théorème V.1 dont il est question.

Notations. Définitions.

On notera $\Phi(X,.)$ la famille de fonctions, obtenue en considérant que la première variable de φ joue le rôle d'un paramètre

$$\Phi(X,.) = \{\varphi(x,.) | x \in X\} \subset \mathbb{R}^Y \qquad (1)$$

On considérera de même

$$\Phi(.,Y) = \{\varphi(.,y) | y \in Y\} \subset \mathbb{R}^X \qquad (2)$$

Puisque d est symétrique on a

$$D(.,X) = D(X,.) = \{d(x,.) | x \in X\} \subset \mathbb{R}^X \qquad (3)$$

Nous avons introduit au chapitre III, la notion de support d'une fonction symétrique sur $X \times X$. Plus généralement on peut définir la notion de support pour une famille de fonctions dépendant d'un paramètre. Ainsi, un support de la famille $\Phi(X,.)$ sera une partie S de X telle que :

$$\Phi(S,.) = \{\varphi(x,.) \,|\, x \in S\}$$

est une base de $L(\Phi(X,.))$, variété linéaire engendrée par la famille $\Phi(X,.)$. (cf. chapitre III, § III.1.4).

On convient alors de prendre comme

Définition V.2.

Les familles $\Phi(X,.)$ et $D(X,.)$ sont dites liées ssi elles ont un support commun $S \subset X$.

Remarque :

De la définition de support, il résulte alors que $\Phi(X,.)$ et $D(X,.)$ ont les mêmes supports.

De façon plus explicite les familles $\Phi(X,.)$ et $D(X,.)$ sont liées ssi quel que soit l'entier positif N , et quels que soient

$$(x_1,x_2,\ldots,x_N) \in X^N \quad , \quad (A_1,\ldots,A_N) \in \mathbb{R}^N$$

les fonctions

$$\sum_{i=1}^{N} A_i \varphi(x_i,.) \in \mathbb{R}^Y \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} A_i d(x_i,.) \in \mathbb{R}^X$$

ne peuvent s'annuler identiquement sur leur domaine de définition respectif, que simultanément, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{N} A_i \varphi(x_i,.) = 0 \in \mathbb{R}^Y \;\rightleftarrows\; \sum_{i=1}^{N} A_i d(x_i,.) = 0 \in \mathbb{R}^X \; .$$

Nous sommes alors en mesure de démontrer le

Théorème V.2.

Soient φ : $(x,y) \in X \times Y \to \varphi(x,y) \in \mathbb{R}$

d : $(x_1,x_2) \in X \times X \to d(x_1,x_2) \in \mathbb{R}$

(1°) Pour qu'il existe un espace hilbertien réel H , $H \subset \mathbb{R}^Y$, vérifiant

I) $\Phi(X,.) \subset H$

II) $(\varphi(x_1,.)|\varphi(x_2,.))_H = d(x_1,x_2) \qquad \forall (x_1,x_2) \in X \times X$

il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

III) d est symétrique, définie positive ou nulle sur X

IV) $\Phi(X,.)$ et $D(X,.)$ sont liées.

(2°) Si H existe, d'après (III) on peut associer à d , l'espace hilbertien H_d , $H_d \subset \mathbb{R}^X$, de noyau reproduisant d , et alors H admet un noyau reproduisant ssi $\Phi(.,Y) \subset H_d$.

(3°) Si H existe et admet un noyau reproduisant g , alors g a comme expression

$$g(y_1,y_2) = (\varphi(.,y_1)|\varphi(.,y_2))_{H_d} \qquad \forall (y_1,y_2) \in Y \times Y$$

On note alors $H = H_g \subset \mathbb{R}^Y$.

Démonstration.

Première partie Existence de H.

Condition nécessaire. [H existe et vérifie (I)(II)] $\Rightarrow$ (III) et (IV).

En effet H étant réel on a

$$(\varphi(x_1,.)|\varphi(x_2,.)) = d(x_1,x_2) = (\varphi(x_2,.)|\varphi(x_1,.)) = d(x_2,x_1)$$

$$\forall (x_1,x_2) \in X \times X$$

et d est symétrique.

D'après (II) on a aussi

$$\Big\| \sum_{i=1}^{N} A_i \varphi(x_i,.) \Big\|_H^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} A_i A_j d(x_i,x_j) \geq 0$$

et d est définie positive ou nulle sur X .

(III) est donc vérifiée.

On peut donc associer à d (cf. théorème I.4.1) l'espace hilbertien $H_d \subset \mathbb{R}^X$, de noyau reproduisant d , et on a

$$\Big\| \sum_{i=1}^{N} A_i d(x_i,.) \Big\|_{H_d} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} A_i A_j d(x_i,x_j) = \Big\| \sum_{i=1}^{N} A_i \varphi(x_i,.) \Big\|_H$$

et donc $\Phi(X,.)$ et $D(X,.)$ sont liées.

———X———

Condition suffisante.

(III) et (IV) sont vérifiées => H existe et vérifie (I) et (II).

D'après (IV) on peut encore considérer l'espace H_d , $H_d \subset \mathbb{R}^X$.

Considérons l'application linéaire de $L(\Phi(X,.))$ sur $D(X,.)$ définie par

$$i : f = \sum_{i=1}^{N} A_i \varphi(x_i,.) \in L(\Phi(X,.)) \to i(f) = \sum_{i=1}^{N} A_i d(x_i,.) \in L(D(X,.))$$

Il s'agit bien d'une application : Autrement dit $i(f)$ ne dépend pas de la représentation, non nécessairement unique, de f dans $L(\Phi(X,.))$; cela découle en effet de l'hypothèse (III) : $\Phi(X,.)$ et $D(X,.)$ sont liées.

Associons alors à

$$\left| \begin{array}{l} f = \sum_{i=1}^{N} A_i \varphi(x_i,.) \\ \\ h = \sum_{j=1}^{M} A'_j \varphi(x'_j,.) \end{array} \right. , \quad f,h \in L(\Phi(X,.)) \qquad (1)$$

le nombre réel

$$\left[f,h\right] = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} A_i A'_j d(x_i,x'_j) = (i(f) \,|\, i(h))_{H_d} \qquad (2)$$

On définit une forme bilinéaire sur $L(\Phi(X,.)) \times L(\Phi(X,.))$ qui est

. positive : $[f,f] = \|i(f)\|^2_{H_d} \geq 0$

. non dégénérée : $[f,f] = 0 \rightleftarrows \|if\|^2_{H_d} = 0 \rightleftarrows i(f) = 0 \rightleftarrows f = 0$

d'après (IV).

Autrement dit (2) munit $L(\Phi(X,.)) \times L(\Phi(X,.))$ d'une structure d'espace préhilbertien réel H_o, qui par complètion génère une espace hilbertien réel H, $H \subset \mathbb{R}^Y$, vérifiant (I) et (II) par construction même. i est d'après (2) une isométrie de H_o sur $L(D(X,.)) \subset H_d$. On a aussi $\overline{L(D(X,.)} = H_d$ et donc i se prolonge en une isométrie de H sur H_d.

$$(f|h)_H = (i(f)|i(h))_{H_d} \qquad \forall (f,h) \in H \times H \qquad (4)$$

Deuxième partie

On suppose donc que H existe, $H \subset \mathbb{R}^Y$
On a alors d'après le théorème d'existence I.5.1

"H admet un noyau reproduisant"

$\rightleftarrows \forall \xi \in Y \quad |f(\xi)| \leq K_\xi \|f\|_H$, $\forall f \in H$ (K_ξ ne dépend que de ξ)

$\rightleftarrows \forall \xi \in Y \quad |f(\xi)| \leq K_\xi \|f\|_H$, $\forall f \in H_o$ ($H = \bar{H}_o$)

$\rightleftarrows$ $\left.\begin{array}{l} \forall \xi \in Y \\ \forall N \geq 1 \\ \forall (x_1,\ldots,x_N) \in X^N \\ \forall (A_1,\ldots,A_N) \in \mathbb{R}^N \end{array}\right|$ $\left| \sum_{i=1}^N A_i \varphi(x_i,\xi) \right| \leq K_\xi \left\| \sum_{i=1}^N A_i d(x_i,.) \right\|_{H_d}$

$\rightleftarrows \forall \xi \in Y \quad \varphi(.,\xi) \in H_d$ (théorèmes II.4.1, II.4.2 + propriété (IV))

$\rightleftarrows \Phi(.,Y) \subset H_d$.

———— x ————

Troisième partie

H existe et $\Phi(.,Y) \subset H_d$.

On veut déterminer g , noyau reproduisant de H , $H \subset \mathbb{R}^Y$.
Nous avons vu au paragraphe II.6 que l'on peut associer à H son noyau de SCHWARTZ L .
Si $E = \mathbb{R}^Y$ muni de la topologie de la convergence ponctuelle, L est une application linéaire symétrique, positive, de E' dans E vérifiant

$$\overline{L(E')} = H \tag{5}$$

$$< e',h > = (h|Le')_H \qquad \forall e' \in E', \forall h \in H \tag{6}$$

et alors

$$g(y_1,y_2) = < L\delta y_1, \delta y_2 > = (L\delta y_1 | L\delta y_2)_H = (iL\delta y_1 | iL\delta y_2)_{H_d} \tag{7}$$

$$(y_1,y_2) \in Y \times Y$$

Pour connaître g il suffit donc d'expliciter $iL\delta y$ pour $y \in Y$.
Considérons la fonctionnelle ℓ_x linéaire continue sur H définie pour $\forall x \in X$ par

$$\ell_x : \quad h \in H \to \ell_x(h) = (\varphi(x,.)|h)_H \tag{8}$$

On a d'après (4)

$$\ell_x(h) = (i\varphi(x,.)|ih)_{H_d} = (d(x,.)|ih)_{H_d} = (ih)_{(x)}$$

soit $\boxed{\ell_x(h) = \delta x(ih)}$ $\qquad \forall h \in H$ $\qquad \forall x \in X$ $\qquad$ (9)

Prenons en particulier $H = L\delta y$. Il vient

$$\ell_x(L\delta y) = (\varphi(x,.)\,|\,L\delta y) \qquad \text{d'après (8)}$$

$$= \delta y(\varphi(x,.)) \qquad \text{d'après (6)}$$

$$= \varphi(x,y) \qquad \text{par définition de } \delta y \in H'$$

soit $$\boxed{\ell_x(L\delta y) = \delta x(\varphi(.,y))} \qquad \text{par définition de } \delta x \in H'_d \qquad (10)$$

D'après (9) on a aussi

$$\boxed{\ell_x(L\delta y) = \delta x(iL\delta y)} \qquad (11)$$

Donc d'après (10) et (11) il vient

$$\boxed{\delta x(\varphi(.,y)) = \delta x(iL\delta y)} \qquad \forall x \in X \quad \forall y \in Y \qquad (12)$$

ou encore

$$\boxed{\varphi(.,y) = iL\delta y} \qquad \forall y \in Y \qquad (13)$$

et d'après (7)

$$\boxed{g(y_1,y_2) = (\varphi(.,y_1)\,|\,\varphi(.,y_2))_{H_d} \qquad \forall (y_1,y_2) \in Y \times Y} \qquad (14)$$

ce qui achève la démonstration.

———X———

Remarques :

1 Pour $X = Y$ et $\varphi = d$ on retrouver bien le théorème d'ARONSZAJN. Dans ce cas les familles $\Phi(X,.)$ et $D(X,.)$ sont toujours liées et on a toujours par construction même $\Phi(.,X) = \Phi(X,.) \subset H_d$, et donc l'espace hilbertien admet toujours un noyau reproduisant, et ce noyau est égal à φ.

2 Lorsque $\varphi \neq d$ on peut très bien obtenir l'existence de H, sans que H admette un noyau reproduisant. Donnons un exemple. On prend

$$\left\{ \begin{array}{l} X =]0,1] \quad \text{et} \quad Y = X \\ \varphi(x,y) = e^{-xy} \\ d(x,y) = \min(x,y) \end{array} \right| \quad (x,y) \in X \times Y = X^2$$

On vérifie aisément que pour $x_1, x_2, \ldots, x_N$ distincts dans X on a $\sum_{i=1}^{N} A_i \varphi(x_i,.) = 0 \rightleftarrows A_i = 0 \; i=1,2,\ldots,N \rightleftarrows \sum_{i=1}^{N} d(x_i,.) = 0$

et donc les familles $\Phi(X,.)$ et $D(X,.)$ sont liées.
D'autre part d est symétrique, définie positive sur X (cf. chapitre III) et donc toutes les conditions sont requises pour qu'il existe un espace hilbertien H, $H \subset \mathbb{R}^X$ tel que

1) L'application $e^{-a.} : x \to e^{-ax}$, appartient à H quel que soit $a \in X$

2) $(e^{-a.} | e^{-b.})_H = \min(a,b) \quad \forall (a,b) \in X \times X$

On vérifie toutefois que $\varphi(.,a) = \varphi(a,.) = e^{-a.}$ n'appartient pas à H_d. En effet on a

$$H_d = \{f \in C^{\circ}_{[0,1]} \mid f' \in L_{(0,1)} \; , \; f(0) = 0 \; , \; (f|h)_{H_d} = \int_0^1 f'h'dx\}$$

et la condition $\varphi(a,0) = 0$ n'est pas satisfaite.
H n'admet donc pas de noyau reproduisant. Cela tient au fait que la fonctionnelle d'évaluation $\delta_o : f \in H \to \delta_o(f) = f(0)$,

fonctionnelle qui est définie sur $\Phi(X,.)$, n'est pas bornée sur $\Phi(X,.)$. On a en effet $\delta_o(e^{-a.}) = 1$ et $\|e^{-a.}\|_H^2 = a$, et on ne peut pas trouver un scalaire K tel que :

$$|\delta_o(e^{-a.})| \leq K\|e^{-a.}\|_H \qquad \forall a \in]0,1] \ .$$

———X———

V.3 Espaces hilbertiens (à noyaux reproduisants) couplés).

Deux espaces hilbertiens $H_d \subset \mathbb{R}^X$ et $H_g \subset \mathbb{R}^Y$, obtenus par le procédé ci-dessus sont dits couplés. La fonction φ définie sur $X \times Y$ est appelée fonction de couplage de H_d et H_g (dans cet ordre).

V.3.1. Relations de couplages :

Si H_d et H_g sont couplés par rapport à φ on a , d'après ce qui précède :

$$\boxed{\begin{aligned}
&\Phi(X,.) = \{\varphi(x,.) \mid x \in X\} \subset \mathbb{R}^Y \\
&\Phi(.,Y) = \{\varphi(.,y) \mid y \in Y\} \subset \mathbb{R}^X \\
&(\varphi(x_1,.) \mid \varphi(x_2,.))_{H_g} = d(x_1,x_2) \quad \text{(noyau reproduisant de } H_d) \\
&(\varphi(.,y_1) \mid \varphi(.,y_2))_{H_d} = g(y_1,y_2) \quad \text{(noyau reproduisant de } H_g)
\end{aligned}} \qquad \text{(R1)}$$

D'autre part d'après (8), (9) l'isométrie

$$\boxed{i : H_g \longrightarrow H_d}$$

est définie par

$$\boxed{(ih)_{(x)} = (\varphi(x,.) \mid h)_{H_g} \qquad \begin{matrix} \forall h \in H_g \\ \forall x \in X \end{matrix}} \qquad \text{(R2)}$$

On peut alors considérer que H_d s'obtient à partir de H_g (g est symétrique définie positive ou nulle sur Y et $G(.,Y)$ et $\Phi(.,Y)$ sont liées et ainsi l'isométrie

$$\boxed{i^{-1} : H_d \to H_g}$$

est définie par

$$\boxed{(i^{-1}f)_{(y)} = (\varphi(.,y)|f)_{H_d} \qquad \begin{array}{l}\forall f \in H_d \\ \forall y \in Y\end{array}} \qquad \text{(R3)}$$

———————X———————

Remarque :

Deux espaces hilbertiens $H_g \subset \mathbb{R}^Y$ et $H_d \subset \mathbb{R}^X$ de noyaux reproduisants respectifs g et d, peuvent toujours être considérés comme couplés.

Il suffit en effet de prendre comme fonction de couplage

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i(x) f_i(y)$$

si $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de H_d

$\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de H_g

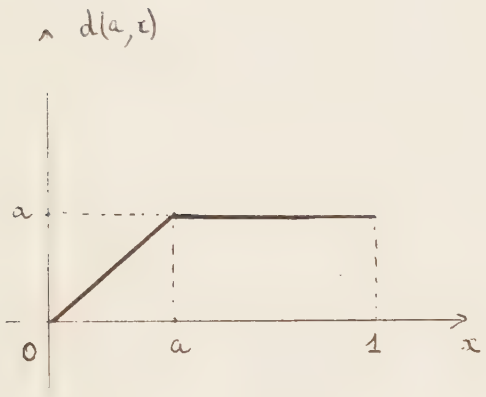
On vérifie en effet directement les relations de couplage (R1) (cf. propriété II.5.7).

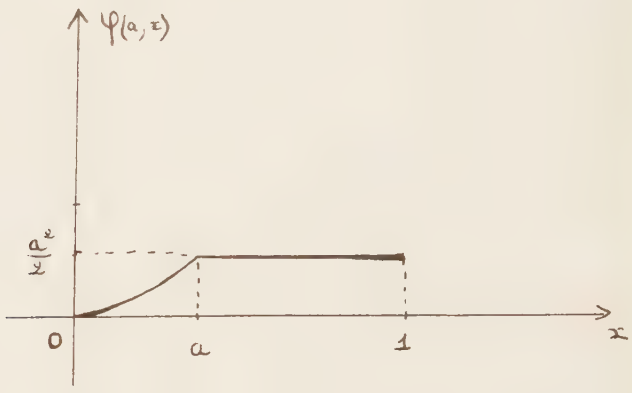
———————X———————

V.3.2. Exemples de couplages.

On se donne X, Y, φ, d et on cherche à déterminer H_g et g

$$1°)\begin{cases} X = Y = [0,1] \\ d(a,x) = d(x,a) = \min(a,x) \\ \varphi(a,x) = \varphi(x,a) = \min\left(\frac{a^2}{2}, \frac{x^2}{2}\right) \end{cases} \Big| \quad \forall (a,x) \in X \times X$$





1) d est symétrique définie positive ou nulle sur X (cf. § III.2) et de façon plus précise on a si $0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leq 1$

$$\sum_{i=1}^{N} A_i d(a_i,.) = 0 \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} A_i = 0 \quad i=2,\ldots,N \\ A_1 a_1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} A_i \varphi(a_i,.) = 0$$

et $\Phi(X,.)$ et $D(X,.)$ sont liées.

On a aussi (cf. chapitre III)

$$H_d = \{\varphi \in \mathbb{R}^X \mid \ , \varphi' \in L^2(0,1),\ \varphi(0) = 0\ ,\ (\varphi_1|\varphi_2)_{H_d} = \int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_2'(x)dx\}$$

2) D'après le théorème V.2 il existe donc un espace hilbertien H, $H \subset \mathbb{R}^X$ vérifiant :

$$\left\| \begin{array}{ll} \varphi(a,.) \in H & \forall a \in X \\ (\varphi(a,.)|\varphi(b,.))_H = \min(a,b) & \forall (a,b) \in X \times X \end{array} \right.$$

3) Puisque la fonction φ est symétrique on a $\Phi(.,X) = \Phi(X,.) \subset H_d$ et donc H admet un noyau reproduisant g donné par :

$$g(a,b) = (\varphi(.,a)|\varphi(.,b))_{H_d} = \int_0^1 \varphi'(x,a)\varphi'(x,b)dx = \int_0^{\min(a,b)} x^2\,dx$$

soit $\boxed{g(a,b) = \min\left(\frac{a^3}{3}, \frac{b^3}{3}\right)}$

4) <u>Détermination de $H = H_g$</u>.

Puisque g est de type factorisable sur X, on pourrait se rapporter aux résultats du chapitre III pour déterminer H_g. On peut aussi le faire directement en utilisant les relations de couplage § V.3 .

Soit $f \in H_d$. On a donc $f, f' \in L^2(0,1)$; $f(0) = 0$;
Posons $h = i^{-1}(f)$ $\quad h \in H_g$ $\quad (i^{-1}H_d = H_g)$
On a d'après (R3)

$$h(x) = (\varphi(.,x)|f)_{H_d} = \int_0^x uf'(u)du$$

soit $\boxed{h(x) = xf(x) - \int_0^x f(u)du}$ $\qquad \forall x \in X$

On vérifie donc que si $h \in H_g$, donc $h = i^{-1}f$ avec $f \in H_d$ on a

. $h(0) = 0$

.. $h \in L^2(0,1)$

... $\frac{h'}{x} = f' \in L^2(0,1)$

Réciproquement soit $h \in \mathbb{R}^X$ et vérifiant ., .., et ... ;

La fonction $\varphi(x) = \int_0^x \frac{h'(u)}{u}\,du$ est parfaitement définie et

vérifie $\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi \in L^2(0,1) \\ \varphi' = \frac{h'}{x} \in L^2(0,1) \end{cases}$

donc $\varphi \in H_d$ et on a $i^{-1}(\varphi)_{(x)} = x \int_0^x \frac{h'(u)}{u}\,du - \int_0^x \left(\int_0^u \frac{h'(t)}{t} dt \right) du$

$$= \int_0^x h'(u)\,du$$

$$= h(x)$$

donc $h = i^{-1}(\varphi)$ et $h \in H_g$.
Les propriétés ., .., ... caractérisent donc les fonctions de H_g et l'isométrie i de H_d sur H_g est définie par

$$\left[i(h) \right]_{(x)} = \int_0^x \frac{h'(u)}{u}\,du \qquad \begin{matrix} h \in H_g \\ x \in X \end{matrix}$$

et donc $(h_1 | h_2)_{H_g} = (ih_1 | ih_2)_{H_d} = \int_0^1 \frac{h_1'(x) h_2'(x)}{x^2}\,dx$

On a donc en résumé :

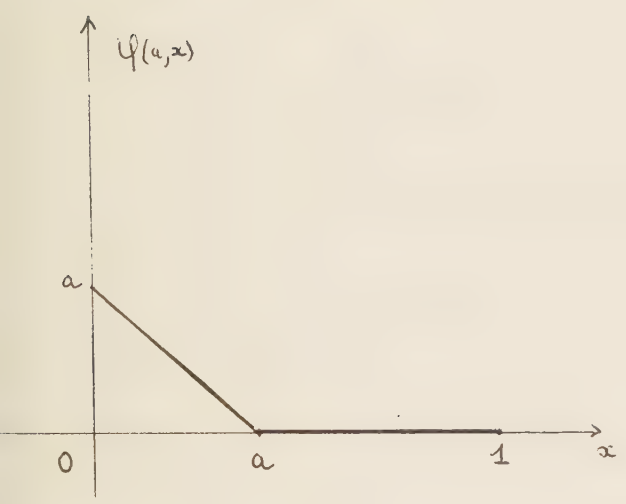
$$H_g = \{ \varphi \in \mathbb{R}^X | \varphi, \frac{\varphi'}{x} \in L^2(0,1) \; ; \; \varphi(0) = 0 \; ; \; (\varphi_1 | \varphi_2)_{H_g} = \int_0^1 \frac{\varphi_1'(x) \varphi_2'(x)}{x^2}\,dx$$

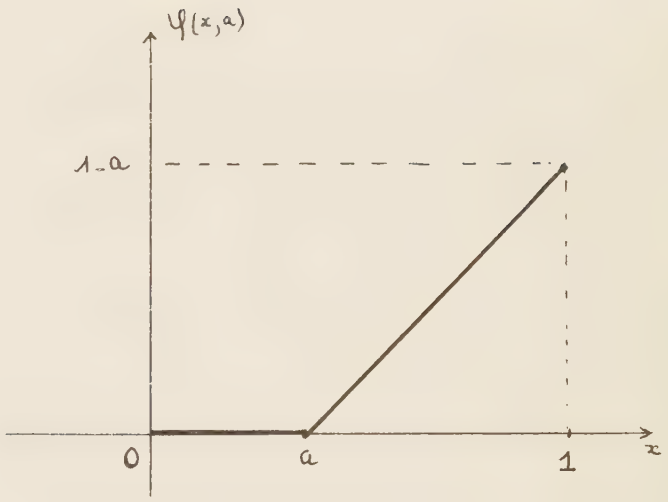
avec $g(a,b) = \min \left(\frac{a^3}{3} , \frac{b^3}{3} \right)$

$(a,b) \in X \times X$

———— X ————

$$2°)\begin{cases} X = Y = [0,1] \\ d(a,x) = d(x,a) = \min(a,x) \\ \varphi(a,x) = a-x \quad \text{si} \quad x \leq a \\ \qquad\quad = 0 \qquad \text{sinon} \end{cases}$$





1) d est symétrique définie positive ou nulle sur X (cf. exemple précédent) et si $0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leq 1$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i d(a_i,.) = 0 \rightleftarrows \left\| \begin{array}{l} A_i = 0 \quad i=2,\ldots,n \\ A_1 a_1 = 0 \end{array} \right. \rightleftarrows \sum_{i=1}^{n} A_i \varphi(a_i,.) = 0$$

et $\Phi(X,.)$ et $D(X,.)$ sont liées.

On a encore

$$H_d = \{\varphi \in \mathbb{R}^X \mid \varphi,\varphi' \in \mathcal{L}^2(0,1) \; ; \; \varphi(0) = 0 \; ; \; (\varphi_1|\varphi_2)_{H_d} = \int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_2'(x)dx\}$$

2)On a clairement $\varphi(.,a) \in H_d$, $\forall a \in X$ et donc $\Phi(.,X) \subset H_d$

et donc $g(a,b) = (\varphi(.,a)|\varphi(.,b))_{H_d}$

$$= \int_{\max(a,b)}^{1} dx = 1 - \max(a,b) \; .$$

3) Déterminant de H_g :

Soit $f \in H_d$. On a d'après (R3)
$h = i^{-1}(f) \in H_g$ avec

$$h(x) = (\varphi(.,x)\,|\,f(.))_{H_d} = \int_x^1 f'(t)dt = f(1)-f(x)$$

et donc

$$i(h)_{(x)} = f(x) = h(0) - h(x)$$

De plus $(h_1|h_2)_{H_g} = (ih_1|ih_2)_{H_d} = \int_0^1 h_1'(x)h_2'(x)dx$

On a donc finalement

$$H_g = \{h \in \mathbb{R}^X \,|\, h,h' \in L^2(0,1)\ ;\ h(1) = 0\ ;\ (h_1|h_2)_{H_g} = \int_0^1 h_1'(x)h_2'(x)dx\}$$

$g(a,b) = 1 - \max(a,b)$

———X———

3°) Soit Y une partie quelconque de $\mathbb{R}$: $Y \subset \mathbb{R}$.

On considère deux <u>fonctions</u> a , b définies sur Y à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui vérifient :

- $a(y) \neq 0 \qquad \forall y \in Y$
- $y \longrightarrow v(y) = \dfrac{b(y)}{a(y)}$ est positive, non croissante sur Y .

On prend alors

$$X = \{x > 0 \,|\, \exists y \in Y : b(y) \neq 0\ v(y) = x\}$$

et on suppose en outre que X est un intervalle (α,β) de $\mathbb{R}^+$

On pose alors :

$$\left\| \begin{array}{lll} d(x_1,x_2) = \min(x_1,x_2) & & (x_1,x_2) \in X \times X \\ \varphi(x,y) = x\,a(y) & \text{si} & x \leq v(y) \\ \quad = b(y) & \text{sinon} & \end{array} \right| \quad (x,y) \in X \times Y$$

Nous allons voir que la fonction φ est une fonction de couplage entre l'espace hilbertien H_d , $H_d \subset \mathbb{R}^X$ de noyau reproduisant d et l'espace H_g , $H_g \subset \mathbb{R}^Y$ de noyau reproduisant g où g est factorisable et admet comme composantes les fonctions a et b .

En effet :

1) d est symétrique, définie positive sur X (cf. définition même de X, et chapitre III) et on a

$$H_d = \{F \in \mathbb{R}^X \mid F,F' \in L^2_X \; ; \; F(0) = 0 \text{ si } \alpha = 0 \,,$$

$$(F_1\ F_2)_{H_d} = \int_X F_1'(x)F_2'(x)dx + \frac{F_1(\alpha)F_2(\alpha)}{\alpha} \quad \text{si } \alpha \neq 0$$

$$= \int_X F_1'(x)F_2'(x)dx \quad \text{si } \alpha = 0\}$$

2) Les familles $\Phi(X,.)$ et $D(X,.)$ sont liées.

Il suffit en effet de vérifier que l'on a pour

$x_i \in X \quad i=1,2,\ldots,n \quad x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \varphi(x_i,.) = 0 \in \mathbb{R}^Y \rightleftarrows A_i = 0 \; i=1,2,\ldots,n \rightleftarrows \sum_{i=1}^{n} A_i d(x_i,.) = 0 \in \mathbb{R}^X$$

Ainsi d'après la première partie du théorème V.2 il existe un espace hilbertien H , $H \subset \mathbb{R}^Y$ tel que

a/ $\quad \Phi(X,.) \subset H$

b/ $\quad (\varphi(x_1,.) \mid \varphi(x_2,.))_H = d(x_1,x_2) = \min(x_1,x_2) \quad \forall (x_1,x_2) \in X \times X$

3) $\varphi(x,y) = x\,a(y)$ si $x \leq v(y)$

$= b(y)$ sinon $\qquad \forall y \in Y$

et donc on a trivialement $\Phi(.,Y) \subset H_d$.

L'espace hilbertien H admet donc (théorème V.2) un noyau reproduisant g et on note alors $H = H_g$. On a

$$g(y_1,y_2) = (\varphi(.,y_1)|\varphi(.,y_2))_{H_d}$$

$$= \int_X^\beta \varphi'_x(x,y_1)\varphi'_x(x,y_2) + \frac{\varphi(\alpha,y_1)\varphi(\alpha,y_2)}{\alpha} \quad \text{si} \quad \alpha \neq 0$$

$$= \int_0^\beta \varphi'_x(x,y_1)\varphi'_x(x,y_2) \quad \text{si} \quad \alpha = 0$$

soit dans tous les cas

$$g(y_1,y_2) = a(y_1)b(y_2) \quad \text{si} \quad y_1 \leq y_2$$

$$= a(y_2)b(y_1) \quad \text{sinon} \qquad \forall (y_1,y_2) \in Y \times Y$$

$H = H_g \subset \mathbb{R}^Y$ <u>est donc l'espace hilbertien</u>, <u>associé au noyau factorisable</u> g , <u>de composantes</u> a, b .

D'après la relation de couplage (R3) on a

$$H_g = i^{-1}(H_d) \quad \text{avec}$$

$$\left[i^{-1}(F)\right]_{(y)} = (\varphi(.,y)|F(.))_{H_d} \qquad \forall F \in H_d \quad \forall y \in Y$$

soit

$$\left[i^{-1}(F)\right]_{(y)} = \int_\alpha^{\frac{b(y)}{a(y)}} a(y)F'(t)dt + \frac{\varphi(\alpha,y)F(\alpha)}{\alpha} \quad \text{si} \quad \alpha \neq 0$$

$$= \int_0^{\frac{b(y)}{a(y)}} a(y)F'(t)dt \qquad \text{si} \quad \alpha = 0$$

ou

$$\boxed{\left[i^{-1}(F)\right]_{(y)} = a(y)F(v(y)) \qquad y \in Y \quad F \in H_d}$$

Cette relation ne nous est pas inconnue. Nous l'avons déjà rencontré au chapitre III , lors de l'établissement du théorème III.8.2.

On retrouve ainsi de manière différente l'isométrie entre un espace hilbertien de fonctions, à noyau factorisable et un espace du type $H(\alpha,\beta)$.

———X———

V.4 Exemple d'application du théorème V.2.

On donne $\begin{cases} X = [0,+\infty[\\ Y = [0,1] \\ \varphi(x,y) = e^{-xy}-1 \quad (x,y) \in X \times Y \end{cases}$

On considèrera X comme un ensemble de paramètres , et Y comme le domaine de définition de certaines fonctions.

Soit $f \in \mathbb{R}^Y$, et considérons le problème suivant :

(P) **" Existe-t-il un choix des poids $A_i \in \mathbb{R}$, et des noeuds $x_i \in X$, $i=1,2,\ldots,N$ tel que**

$$y \to \tilde{f}_N(y) = \sum_{i=1}^{N} A_i \varphi(x_i,y)$$

soit une "bonne approximation" de la fonction f ? "

Ce problème est mal posé. Qu'entend-on par "bonne approximation" ? Plus précisément, quel est l'espace de travail, et quel est le critère d'approximation ?

Si ces questions sont importantes pour le mathématicien, il peut ne pas en être ainsi, pour la personne qui formule le problème (P). Ainsi pour **cette** personne, dire que $\tilde{f}_N$ est une bonne approximation de f , peut

signifier simplement (par exemple) que la suite $\{\tilde{f}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, sur Y. (donc f est alors supposée appartenir à $\mathcal{C}^0(Y)$).

On peut envisager de satisfaire cette exigence de la manière suivante :

★ Soit E un espace vectoriel normé de fonctions, $E \subset \mathcal{C}^0(Y)$ vérifiant

(I) $f \in E$

(II) $\varphi(x,.) \in E$, $\forall x \in X$

(III) $\mathcal{L}(\Phi(X,.))$ est dense dans E

(IV) L'injection canonique de X dans $\mathcal{C}^0(Y)$ muni de la topologie de la convergence uniforme, est continue ($E \hookrightarrow \mathcal{C}^0(Y)$).

(V) $\forall N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, il existe un choix au moins de noeuds $x_i^* \in X$, et de poids $A_i^* \in \mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots,N$ vérifiant

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{N} A_i^* \varphi(x_i^*,.) \right\|_E = \min \left\| f - \sum_{i=1}^{N} A_i \varphi(x_i,.) \right\|_E$$

$$\left| \begin{array}{l} x_i \in X \\ A_i \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad i=1,2,\ldots,N$$

(autrement dit dans E , on suppose acquise l'existence d'un meilleur approximant de f) .

★ Il suffira alors de prendre $\tilde{f}_N = \sum_{i=1}^{N} A_i^* \varphi(x_i^*,.)$ (donnée par (V))

On aura en effet d'après (IV)

$$\|f - \tilde{f}_N\|_{\mathcal{C}^0(Y)} \leq K \|f - \tilde{f}_N\|_E \xrightarrow{N \to \infty} 0 \qquad \text{d'après (III) .}$$

Bien entendu le choix plus naturel, semble être $E = \mathcal{C}^0(Y)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur Y . Malheureusement il est alors très difficile d'obtenir la condition (V).

Aussi il semble intéressant, de choisir une topologie plus fine que la topologie de la convergence uniforme. Nous allons voir, en développant l'exemple précédent, comment on peut se servir du théorème V.2.

Au triplet donné X,Y,φ adjoignons la donnée de la fonction d : $d(x_1,x_2) = \min(x_1,x_2) \quad \forall (x_1,x_2) \in X \times X$.
A cette fonction d , symétrique, définie positive ou nulle sur X , correspond (cf. chapitre III) l'espace hilbertien

$$H_d = \{ \varphi \in \overline{C^0_X} \mid \varphi' \in L^2_{(X)} \ , \ \varphi(0)=0 \ , \ (\varphi|\Psi)_{H_d} = \int_0^\infty \varphi'\Psi' dx \}$$

On peut vérifier que toutes les hypothèses du théorème V.2 sont vérifiées pour pouvoir associer à H_d , un espace hilbertien H_g , $H_g \subset \mathbb{R}^Y$ qui vérifie

a/ L'application $\varphi(x,.) : y \in Y \to e^{-xy}-1$, appartient à H_g , $\forall x \in X$

b/ $(\varphi(x_1,.)|\varphi(x_2,.))_{H_g} = d(x_1,x_2) = \min(x_1,x_2)$, $\forall (x_1,x_2) \in X \times X$

c/ $\varphi(.,y) \in H_d$, $\forall y \in Y$.

Dans ces conditions l'espace H_g possède un noyau reproduisant qui s'écrit

$$g(y_1,y_2) = (\varphi(.,y_1)|\varphi(.,y_2))_{H_d} = \frac{y_1 y_2}{y_1+y_2} \qquad \forall (y_1,y_2) \in Y \times Y$$

On peut vérifier que $g(y_1,y_2)$ est séparément continue sur Y , et $g(y,y)$ est bornée sur Y , et donc $H_g \subset C^0(Y)$ (Théorème II.6.3).

Ainsi on a pu, en choisissant d , mettre en évidence un espace hilbertien H_g , satisfaisant les conditions (II), (III), (IV). Mais par ailleurs H_d et H_g sont isométriques et plus précisément $i(H_g) = H_d$ avec $i(\varphi(x,.)) = d(x,.)$. Pour une fonction de H_d , l'existence d'une meilleure approximation par des fonctions d'évaluation est acquise (théorème IV.6.2) et par conséquent, compte tenu de l'isométrie précédente, toute fonction de H_g admet également une meilleure approximation par une combinaison du type $\sum_1^N A_i \varphi(x_i,.)$. En d'autres termes H_g satisfait également (V) .

Finalement nous serons en mesure d'affirmer l'existence de $\tilde{f}_N$, si et seulement si la fonction donnée f appartient à l'espace H_g, (condition (I)).

Si nous poursuivons l'exemple on a $H_g = i^{-1}(H_d)$ avec (cf. relations de couplages § V.3).

$$(i^{-1}k)_{(y)} = (\varphi(.,y)|k)_{H_d} \qquad \begin{matrix} k \in H_d \\ y \in Y \end{matrix}$$

Par conséquent $f \in H_g$ ssi il existe une fonction k de H_d vérifiant

$$(\varphi(.,y)|k)_{H_d} = f(y) \qquad \forall y \in Y$$

Explicitons cette condition :

On doit avoir $(e^{-y\cdot} - 1|k)_{H_d} = f(y) \qquad \forall y \in Y$

soit $-y\int_0^\infty k'(x)e^{-xy}dx = f(y) \qquad \forall y \in Y$

Où en intégrant par parties, ce qui est justifié pour $k \in H_d$

$$\boxed{y^2 \int_0^\infty e^{-xy}\, k(x)\, dx = f(y)}$$

Ainsi les fonctions f de H_g sont du type

$$f = g\, h$$

avec $\begin{cases} g(y) = y^2 \qquad \forall y \in Y \\ h(y) = \int_0^\infty e^{-xy}\, k(x)\, dx\ . \end{cases}$

h est la transformée de Laplace d'une fonction de H_d.

Cette caractérisation de l'espace H_g, n'est pas très explicite, mais il semble bien difficile d'être plus précis.

Résumons nous :
==========

Par le choix de la fonction d , nous avons pu mettre en évidence un espace H_g , tel que si $f \in H_g$, alors f admet une approximation optimale (au sens de la norme dans H_g)

$$y \to \tilde{f}_N(y) = \sum_{i=1}^{N} A_i^* (e^{-x_i^* y} - 1)$$

avec $\lim_{N\to\infty} \tilde{f}_N = f$ (dans $C^0(Y)$ muni de la norme du max) .

Cette manière de procèder n'aura d'intérêt que dans la mesure, où la détermination effective de $\tilde{f}_N$ est possible. Or cette question, on l'a vu au chapitre IV, n'est pas entièrement résolue.
Toutefois, il est assez satisfaisant du point de vue de l'esprit, d'obtenir des espaces normés, dans lesquels le problème de la meilleure approximation par une somme "d'exponentielles", admette une solution.

Nous n'avons pas développé d'avantage pour l'instant, cette façon d'envisager des problèmes d'approximation non linéaire . Il semble auparavant souhaitable d'arriver à mieux caractériser les espaces hilbertiens associés à certains types de noyaux reproduisants (c'est ce que nous avons fait pour les noyaux factorisables).

———————X

Nous terminerons ce bref chapitre par un exemple plus élémentaire

Soit $f(x) = \frac{x^2}{6}(3-2x)$ $\qquad x \in [0,1] = X$

On veut approcher f par une fonction $\tilde{f}_N$ du type

$$\tilde{f}_N = \sum_{i=1}^{N} A_i \varphi(x_i, .) \qquad A_i \in \mathbb{R} \quad x_i \in X \qquad i=1,2,\ldots,N$$

où $\varphi(x_1,x_2) = \min\left(\frac{x_1^2}{2}, \frac{x_2^2}{2}\right) \qquad \forall (x_1,x_2) \in X \times X$

Si nous considérons à nouveau la fonction $d(x_1,x_2) = \min(x_1,x_2)$ définie sur $X \times X$, et si nous appliquons le schéma précédent nous sommes amenés à considérer le couple d'espaces hilbertiens (H_d, H_g) de l'exemple 1 § V.3.2.

$$H_d = \{\varphi | \varphi,\varphi' \in L^2_{(0,1)}, \varphi(0) = 0 ; (\varphi_1|\varphi_2)_{H_d} = \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2' dx\}$$

$$H_g = \{\varphi | \varphi, \frac{\varphi'}{x} \in L^2_{(0,1)}, \varphi(0) = 0 ; (\varphi_1|\varphi_2)_{H_g} = \int_0^1 \frac{\varphi_1'\varphi_2'}{x^2} dx\}$$

On a $H_g \hookrightarrow C^\circ[0,1]$, et d'autre part la fonction f donnée appartient à H_g. L'isométrie entre H_d et H_g est définie par :

$$i(H_g) = H_d \quad \text{où} \quad i(f)_{(y)} = (f|\varphi(.,y))_{H_d}$$

On trouve ici

$$i(f) = h \quad \text{avec} \quad h(x) = x(1 - \frac{x}{2})$$

Le problème initial se ramène donc au problème de l'approximation dans H_d de la fonction h, par des fonctions d'évaluation dans cet espace. Ce problème a été résolu au chapitre IV (h est le représentant dans H_d de la fonctionnelle intégrale) et le tableau ci-dessous résume les résultats. On notera en particulier que l'approximation optimale k^* de k, n'interpole pas k en les x_i^*. Ceci est dû au fait que dans H_g, les fonctions approximantes $\varphi(x,.)$ $x \in X$, ne sont pas les représentants des ponctuelles. D'ailleurs le noyau reproduisant de H_g s'écrit :

$$g(x_1,x_2) = \min\left(\frac{x_1^3}{3}, \frac{x_2^3}{3}\right)$$

H_d

éléments : $f : f, f' \quad L^2_{(0,1)}$

$f(0) = 0$

produit scalaire

$$< f,g > = \int_0^1 f'(x)g'(x)dx$$

approximants

$$\varphi(a,x) = \min(a,x)$$

fonction à approximer

$$h(x) = x\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

H_g

éléments f : $f, \frac{f'}{2} \quad L^2_{(0,1)}$

$f(0) = 0$

produit scalaire

$$< f,g > = \int_0^1 \frac{f'(x)g'(x)}{x^2} dx$$

approximants

$$\varphi(a,x) = \min\left(\frac{a^2}{2}, \frac{x^2}{2}\right)$$

fonction à approximer

$$k(x) = \frac{x^2}{6}(3-2x)$$

N = 2

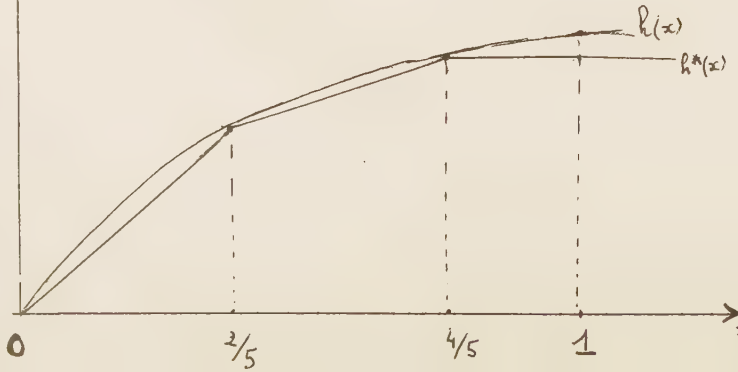
(interpolation)

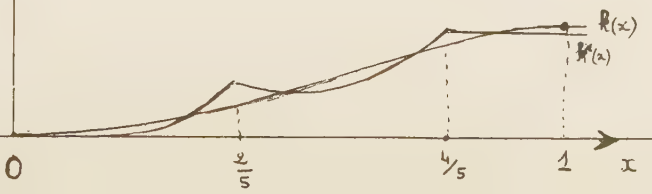
Même solution

$$A_i^* = \frac{2}{2N+1} \qquad i=2,2,\ldots,N$$

$$a_i = \frac{2i}{2N+1}$$

(Il n'y a plus interpolation : les approximants ne sont pas les fonctionnelles ponctuelles)





CHAPITRE VI

APPLICATIONS AUX ESPACES

HILBERTIENS DE SUITES NUMERIQUES

Introduction :

Dans les chapîtres qui précèdent, nous nous sommes intéressés essentiellement à des espaces hilbertiens de fonctions.
En effet, l'ensemble X , $X \subset \mathbb{R}$, domaine de définition de ces fonctions, peut être une partie quelconque de la droite numérique, mais nous avons considéré essentiellement soit le cas d'un intervalle soit celui d'une réunion d'intervalles (cf. chapître III). Toutefois plusieurs des résultats obtenus revêtent une forme particulière, si X est une partie discrète de $\mathbb{R}$. On a alors en réalité des espaces de suites. Nous nous proposons dans ce bref chapître d'énoncer en termes de suites les résultats essentiels qui découlent des théorèmes généraux précédemment démontrés.

VI.2 Notations - Définitions - Enoncé du théorème I.4.2 dans le cas des espaces de suites.

H désignera à partir de maintenant un espace hilbertien réel, de suites numériques.

Les suites de H seront indicées par $\mathbb{N}$.
Si $G = (g_{ij})$ est une matrice infinie , $i,j \in \mathbb{N}$ on notera $G.p$ la suite $\{g_{ip}\}_{i \in \mathbb{N}}$. On désignera par G_n , la tronquée au rang n de la matrice G .
On identifiera alors le noyau reproduisant g d'un espace hilbertien H de suites numériques à une matrice infinie G . Ainsi on dira par

Définition :

La matrice infinie G , à éléments réels, est le noyau reproduisant de l'espace hilbertien réel H , de suites numériques, si :

1/ $\forall p \in \mathbb{N}$ la suite $G.p$ appartient à H

2/ $(G.p|u)_H = u_p \quad \forall p \in \mathbb{N}$

$\forall u = \{u_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in H$.

On peut alors énoncer :

Théorème VI.2.

Pour que la matrice infinie G, à éléments réels, soit le noyau reproduisant de l'espace hilbertien réel H, de suites numériques, il faut et il suffit que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, la tronquée G_n de rang n de la matrice G, soit une matrice symétrique, définie positive ou nulle. (en abrégé $G_n \geq 0 \quad \forall_n \in \mathbb{N}$).

Démonstration :

L'application stricte du théorème d'ARONSZAJN (théorème I.2) conduit dans le cas $X = \mathbb{N}$ à la CNS suivante :

$$G_{\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}} \geq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \{i_1,i_2,\ldots,i_n\} \subset \mathbb{N}^n$$

en désignant par $G_{I,J}$ la sous-matrice de G constituée des éléments de G appartenant à la fois aux lignes d'indice $i \in I$ et aux colonnes d'indices $j \in J$. Mais on a trivialement équivalence entre les deux propositions suivantes :

a// $G_{\{i_0,i_1,\ldots,i_n\}\{i_0,\ldots,i_n\}} \geq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \{i_0,i_1,\ldots,i_n\} \in \mathbb{N}^n$

b// $G_n = G_{\{0,1,2,\ldots,n\}\{0,1,2,\ldots,n\}} \geq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

———X———

Remarques :

* La suite $G.p$, dont les termes sont ceux de la $p^{ième}$ colonne de la matrice G, est donc le représentant dans H de la fonctionnelle d'évaluation $\delta_p \in H'$

$$\delta_p : u \in H \to \delta_p(u) = u_p .$$

* La condition nécessaire et suffisante d'existence d'un noyau reproduisant pour l'espace hilbertien H est que pour tout entier naturel p, la fonctionnelle δ_p soit continuesur H. (cf. théorème I.5.1).

———X———

VI.3 Caractérisation de l'espace hilbertien H à partir de son noyau G.

Soit G une matrice symétrique infinie, vérifiant $G_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. On peut donc lui associer l'espace hilbertien H de suites numériques, de noyau reproduisant G. En particularisant la définition générale de support d'un noyau que nous avons donné au chapitre II, nous dirons ici qu'un support de G est un ensemble d'indices S, $S \subset \mathbb{N}$ tel que :

1 $G_{S,S} > 0$ (matrice définie positive)

2 $\forall p \notin S$ on a $G.p = \sum_{i=1}^{N(p)} A_i G.k_i \quad \Big| \quad k_i \in S \quad i=1,2,\ldots,N(p)$; $A_i \in \mathbb{R}$

Autrement dit, si S est un support, la matrice $G_{S,S}$ est régulière, et pour tout $I \subset \mathbb{N}$ tel que card (I) > card (S) si card (S) est fini ou tel que $I \supset S$ si card $(S) = +\infty$, la matrice $G_{I,I}$ est singulière. Si $u \in H$, la suite u est complètement déterminée par ses composantes u_i, $i \in S$. En effet, si

$$G.p = \sum_{i=1}^{N(p)} A_i G.k_i \qquad k_i \in S \quad i=1,2,\ldots,N(p)$$

On a nécessairement pour $u \in H$

$$u_p = \sum_{i=1}^{N(p)} A_i u_{k_i}$$

Pour caractériser H, on se placera dans l'hypothèse simplificatrice $S = \mathbb{N}$, autrement dit $G_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. On a alors (cf. théorème II-4-1).

Théorème VI.3.

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour que u appartienne à l'espace hilbertien réel H , $H \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, de noyau reproduisant G , de support $S = \mathbb{N}$, il faut et il suffit que l'on ait

$$u^{(n)^t} G_n^{-1} u^{(n)} \leq K_u^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad (K_u^2 \text{ ne dépendant que de } u)$$

($u^{(n)}$ désignant le tronqué de rang n de la suite u , $u^{(n)} \in \mathbb{R}^{n+1}$).
De plus pour $u \in H$ on a :

$$\|u\|_H = \lim_n \nearrow \; u^{(n)^t} G_n^{-1} u^{(n)}$$

VI.4 Espaces hilbertiens de suites, à noyaux reproduisants factorisables.

En accord avec la définition générale que nous avons donnée au chapître III, pour un noyau factorisable, on dira que la matrice symétrique G , noyau reproduisant de H , $H \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, est un noyau factorisable s'il existe deux suites numériques $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$G = (g_{ij}) \quad \text{avec} \quad g_{i,j} = a_i b_j \quad \text{si} \quad i \leq j \qquad (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$= a_j b_i \quad \text{sinon}$$

En abrégé on dira que la matrice G est factorisable (cf. [5]).
Les suites $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seront appelées les composantes de G .
Le théorème (III-2) s'énonce alors

Théorème VI.4.1

Pour que la matrice factorisable G, de composantes $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ soit le noyau reproduisant de l'espace hilbertien réel H, $H \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, il faut et il suffit que

1° La suite $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}'}$ avec $v_n = \frac{b_n}{a_n}$

soit positive, non croissante

où $\mathbb{N}' = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n b_n \neq 0\}$

2° Si $a_{n_o} = 0$ $(n_o \in \mathbb{N})$ et $b_{n_o} \neq 0$ alors $a_n = 0$ $\forall n \leq n_o$

de même si $b_{n_o} = 0$ $(n_o \in \mathbb{N})$ et $a_{n_o} \neq 0$ alors $b_n = 0$ $\forall n \geq n_o$

Ce résultat est intéressant car il permet de générer de façon simple des espaces hilbertiens de suites à noyau reproduisant. En effet on a vu au chapitre III que l'on pouvait calculer formellement l'inverse d'une matrice factorisable, et exprimer très simplement une forme quadratique du type $u^{(n)\dagger} G_n^{-1} u^{(n)}$. On a en effet pour G_n régulière

$$u^{(n)\dagger} G_n^{-1} u^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(k_i - k_{i+1})^2}{v_i - v_{i+1}} + \frac{k_n^2}{v_n} \quad \text{avec} \quad k_i = \frac{u_i}{a_i} \qquad i=1,2,\ldots$$

$$\text{ou} \quad u^{(n)\dagger} G_n^{-1} u^{(n)} = \frac{\hat{k}_o^2}{\hat{v}_o} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i)^2}{\hat{v}_{i+1} - \hat{v}_i} \quad \text{si} \quad \hat{v}_i = \frac{1}{v_i} \quad \hat{k}_i = \frac{u_i}{b_i}$$

et on a (cf. théorème VI.3) le

Théorème VI.4.2.

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour que u appartienne à l'espace hilbertien réel H, $H \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, de noyau reproduisant factorisable G, de composantes $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de support $S = \mathbb{N}$, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\mu_n = \frac{\hat{k}_o^2}{\hat{v}_o} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i)^2}{\hat{v}_{i+1} - \hat{v}_i} = \sum_{0}^{n-1} \frac{(k_i - k_{i+1})^2}{v_i - v_{i+1}} + \frac{k_n^2}{v_n} \leq K_u^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

où K_u est une constante ne dépendant que de u,

et pour $u \in H$ on a :

$$\|u\|_H^2 = \lim_{n\to\infty} \nearrow \mu_n$$

$$= \frac{\hat{k}_o^2}{\hat{v}_o} + \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\hat{k}_{i+1}-\hat{k}_i)^2}{\hat{v}_{i+1}-\hat{v}_i}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(k_i-k_{i+1})^2}{v_i-v_{i+1}} + \lim_{n\to\infty} \frac{k_n^2}{v_n} \quad .$$

Exemple ① .

Les espaces H_θ . $0 \leq \theta < 1$

Posons :

$$\begin{cases} a_n = 1 \\ b_n = \dfrac{\theta^n}{1-\theta} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Les suites $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ peuvent être considérées comme les composantes d'un noyau reproduisant factorisable associé à un espace hilbertien réel de suites numériques, noté H_θ .
En effet, on a $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ donc $\mathbb{N}' = \mathbb{N}$ et $v_n = \frac{b_n}{a_n} = b_n$, donc la suite v_n est positive strictement décroissante sur $\mathbb{N}'$.

Pour $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on a ici $k_i = \frac{u_i}{a_i} = u_i \qquad v_i - v_{i+1} = \frac{\theta^i - \theta^{i+1}}{1-\theta} = \theta^i$

et donc :

$$\mu_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(k_i-k_{i+1})^2}{v_i-v_{i+1}} + \frac{k_n^2}{v_n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\Delta u_i)^2}{\theta^i} + \frac{u_n^2}{\theta^n}(1-\theta) \quad \text{avec } \Delta u_i = u_{i+1}-u_i$$

On a donc $u \in H_\theta \ \rightleftarrows \ \mu_n \leq k_u^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Nous allons caractériser H_θ .

Soit $u \in H_\theta$. On a donc $\mu_n \leq K_u^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
En particulier on a

a/ $\star \quad (1-\theta)\dfrac{u_n}{\theta^n} \leq K_u^2 \quad \forall n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ donc $H \subset c_o$ ensembles des suites convergentes vers 0 .

b/ $\star \quad \sum\limits_{i=0}^{n=1} \dfrac{(\Delta u_i)^2}{\theta^i} \leq K_u^2 \quad \forall n$ et donc la série $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{(\Delta u_i)^2}{\theta^i}$ est convergente.

Montrons alors que $\lim\limits_{n\to\infty} \nearrow \mu_n = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{(\Delta u_i)^2}{\theta^i}$, autrement dit montrons que

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n^2}{\theta^n} = 0$. En effet $u_n - u_{n+p} = u_n - u_{n+1} + u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots + u_{n+p-1} - u_{n+p}$

$$= \sum_{i=n}^{n+p-1} \Delta u_i$$

et donc :

$$|u_n - u_{n+p}| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} |\Delta u_i| = \sum_{i=n}^{n+p-1} \frac{|\Delta u_i|}{\sqrt{\theta^i}} \sqrt{\theta^i} \leq \Big(\sum_{i=n}^{n+p-1} \frac{(\Delta u_i)^2}{\theta^i} \star \sum_{i=n}^{n+p-1} \theta^i \Big)^{1/2}$$

d'après l'inégalité de Schwartz.
Ou encore en faisant tendre p vers l'infini et en utilisant b)

$$|u_n|^2 \leq \Big(\sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\Delta u_i)^2}{\theta^i} \Big) \star \frac{\theta^n}{1-\theta}$$

et donc $\quad 0 \leq (1-\theta)\dfrac{u_n^2}{\theta^n} \leq \sum\limits_{i=n}^{\infty} \dfrac{(\Delta u_i)^2}{\theta^i}$

d'où $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n^2}{\theta^n} = 0$.

On a donc pour $u \in H \quad \|u\|_H^2 = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{(\Delta u_i)^2}{\theta^i}$.

Réciproquement soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ et $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\Delta u_i)^2}{\theta^i} < +\infty$ alors qu'après ce qui précède on a aussi $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n^2}{\theta^n} = 0$

et donc $\mu_n \leq K_u^2 \quad \forall n$ donc $u \in H_\theta$. On a finalement

$$H_\theta = \{u = \{u_i\}_{i \in \mathbb{N}} \mid \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \ , \ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\Delta u_i)^2}{\theta^i} < +\infty \ , \ (u|v)_H = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Delta u_i \Delta v_i}{\theta^i} \}$$

$$(\Delta u_i = u_{i+1} - u_i)$$

J. BARANGER a étudié directement cet espace de suites et a montré que pour $u \in H_\theta$ la série $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ est absolument convergente, et que l'injection canonique de H dans ℓ_1 est continue (H_θ est un sous-espace hilbertien de ℓ_1) cf. [4] .

———— x ————

Exemple (2) $\quad \begin{cases} a_n = n+1 \\ b_n = \frac{1}{n+1} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$

Pour déterminer H on va évaluer μ_n , $n \in \mathbb{N}$.
On a

$$\mu_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\frac{u_i}{a_i} - \frac{u_{i+1}}{a_{i+1}})^2}{\frac{b_i}{a_i} - \frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}} + \frac{u_n^2}{a_n b_n} \qquad (1)$$

Transformons formellement l'expression de μ_n , avant de remplacer a_n et b_n par leurs expressions.

On pose

$$p_i = \frac{1}{b_i a_{i+1} - a_i b_{i+1}} = \frac{1}{b_i \Delta a_i - a_i \Delta b_i} \qquad (2)$$

On a alors

$$\mu_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left[p_i u_i^2 \frac{a_{i+1}}{a_i} + p_i u_{i+1}^2 \frac{a_i}{a_{i+1}} - 2 p_i u_i u_{i+1} \right] + \frac{u_n^2}{a_n b_n} \qquad (3)$$

$$= p_o u_o^2 \frac{a_1}{a_0} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{a_{i+1} p_i + a_{i-1} p_{i-1}}{a_i} u_i^2 - 2 p_i u_i u_{i+1} \right) + p_{n-1} u_n^2 \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{u_n^2}{a_n b_n} - 2 p_o u_o u_1 \qquad (4)$$

Introduisons les quantités

$$q_i = \frac{a_{i+1} p_i + a_{i-1} p_{i-1}}{a_i} - p_i - p_{i-1} \qquad i = 1, 2, \ldots \qquad (5)$$

(4) devient

$$\mu_n = p_o u_o^2 \frac{a_1}{a_o} - 2 p_o u_o u_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(q_i u_i^2 + (p_i + p_{i-1}) u_i^2 - 2 p_i u_i u_{i+1} \right) + \frac{1 + p_{n-1} a_{n-1} b_n}{a_n b_n} u_n^2 \qquad (6)$$

$$= \underbrace{p_o u_o^2 \frac{a_1}{a_o} - 2 p_o u_o u_1 + p_o u_1^2}_{\alpha} + \sum_{i=1}^{n-1} \left[q_i u_i^2 + p_i (u_{i+1} - u_i)^2 \right] + \left[\frac{1 + p_{n-1} a_{n-1} b_n}{a_n b_n} - p_{n-1} \right] u_n^2 \qquad (7)$$

$$= \alpha + \sum_{i=1}^{n-1} \left[q_i u_i^2 + p_i (\Delta u_i)^2 \right] + \frac{1 - p_{n-1} b_n \Delta a_{n-1}}{a_n b_n} u_n^2 \qquad (8)$$

et compte tenu de (2)

$$\mu_n = \alpha + \sum_{i=1}^{n-1} \left[q_i u_i^2 + p_i (\Delta u_i)^2 \right] - \frac{p_{n-1} \Delta b_{n-1}}{b_n} u_n^2 \qquad (9)$$

et finalement

$$\mu_n = \left(p_o \frac{\Delta a_o}{a_o} u_o^2 - q_o u_o^2\right) + \sum_{i=0}^{n-1} \left[q_i u_i^2 + p_i (\Delta u_i)^2\right] - \frac{p_{n-1} \Delta b_{n-1}}{b_n} u_n^2 \qquad (10)$$

(q_o est arbitraire et on peut par exemple choisir la valeur donnée par (5) pour i=0).

Dans notre cas nous avons : $a_n = n+1$

$$b_n = \frac{1}{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}$$

On obtient donc :

$$p_i = \frac{1}{\frac{i+2}{i+1} - \frac{i+1}{i+2}} = \frac{(i+1)(i+2)}{(i+2)^2 - (i+1)^2} = \frac{(i+1)(i+2)}{2i+3}$$

$$q_i = \frac{p_i \Delta a_i - p_{i-1} \Delta a_{i-1}}{a_i} = \frac{\Delta(p_{i-1} \Delta a_{i-1})}{a_i}$$

$$= \left[\frac{(i+1)(i+2)}{2i+3} - \frac{i(i+1)}{2i+1}\right] \; / \; (i+1)$$

soit $$q_i = \frac{2i+2}{(2i+1)(2i+3)}$$

D'autre part $q_o = \frac{p_o \Delta a_o}{a_o} = \frac{2}{3}$, $\frac{p_{n-1} \Delta b_{n-1}}{b_n} = -\frac{n+1}{2n+1}$

et donc

$$\mu_n = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left[\frac{2i+2}{(2i+1)(2i+3)} u_i^2 + \frac{(i+1)(i+2)}{2i+3} (\Delta u_i)^2\right]}_{s_i} + \frac{n+1}{2n+1} u_n^2$$

Détermination de H :

On a $u = \{u_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in H \rightleftarrows \mu_n \leq K_u^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a/ si $u \in H \Rightarrow \mu_n \leq K_u^2 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} s_i$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n^2$ existe

donc $u \in H \Rightarrow$

$$\left|\begin{array}{ll} \sum_{0}^{\infty} s_i \text{ converge} & (I) \\ \lim_{n\to\infty} u_n^2 \text{ existe} & (II) \end{array}\right.$$

b/ réciproquement si (I) et (II) sont satisfaites alors μ_n est bornée, indépendamment de n, et donc $u \in H$.

Donc

$$H = \{u = \{u_i\}_{i\in\mathbb{N}} \mid \ell = \lim_{n\to\infty} u_n^2 \text{ existe} ; s = \sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{2i+2}{(2i+1)(2i+3)}u_i^2 + \frac{(i+1)(i+2)}{2i+3}(\Delta u_i^2)\right] < +\infty\}$$

$$\|u\|_H^2 = s + \frac{\ell}{2}$$

———X———

Remarques :

1/ On peut rapprocher l'expression de la norme, des expressions déjà trouvées au chapitre III en ce qui concerne les fonctions.
Les quantités

$$\left[\begin{array}{l} \int_X \left[p(x)f'^2(x) + q(x)f^2(x)\right]dx \\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\Delta u_i)^2 + q_i u_i^2 \end{array}\right.$$

sont de même type.

Mais on a aussi

$$\begin{cases} p = \dfrac{1}{a'b-ab'} \\ p_i = \dfrac{1}{b_i\Delta a_i - a_i\Delta b_i} \end{cases}$$

De même l'expression (5) de q_i peut se transformer.
On trouve

$$q_i = \frac{p_i\Delta a_i - p_{i-1}\Delta a_{i-1}}{a_i} = \frac{\Delta(p_{i-1}\Delta a_{i-1})}{a_i}$$

$$= p_i p_{i-1}\left[\Delta a_{i-1}\Delta^2 b_{i-1} - \Delta b_{i-1}\Delta^2 a_{i-1}\right]$$

(attention : $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$)

et on peut rapprocher les expressions

$$\begin{cases} q = p^2(a'b''-a''b') \\ q_i = p_i p_{i-1}(\Delta a_{i-1}\Delta^2 b_{i-1} - \Delta b_{i-1}\Delta^2 a_{i-1}) \end{cases}$$

Enfin, en choisissant $q_o=0$ il vient d'après (10)

$$\|u\|_H^2 = p_o \frac{\Delta a_o}{a_o} u_o^2 + \sum_{i=0}^{\infty} (q_i u_i^2 + p_i(\Delta u_i)^2) - \lim_{n\to\infty} \frac{p_{n-1}\Delta b_{n-1}}{b_n} u_n^2$$

expression à rapprocher de la formule trouvée pour les fonctions :
(cas $X = [0,1]$),

$$\|f\|_H^2 = \left(\frac{pa'}{a} f^2\right)(0) + \int_0^1 \left[p(x)f'^2(x) + q(x)f^2(x)\right]dx - \left(\frac{pb'}{b} f^2\right)(1)$$

2/ Un problème très important serait l'étude de ce type d'espace hilbertien de suites, du point de vue de l'injection dans ℓ_1 . Ce problème a été étudié par J. BARANGER (cf. [4]) mais il est difficile d'envisager le cas général ; un problème encore plus difficile est celui de la recherche de formules d'approximation optimales, de fonctionnelles linéaires continues sur ces espaces de suites.

———×———

Remarque :

Pour d'autres considérations sur des espaces hilbertiens de suites on pourra consulter aussi : F. CATZ [12] , N. GASTINEL [23] .

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. ARONSZAJN
Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 68 (1950), 337-404.

[2] M. ATTEIA
Etude de certains noyaux et théorie des fonctions splines en Analyse Numérique.
Thèse Grenoble 1966.

[3] J. BARANGER
Approximation optimale de la somme d'une série.
C.R.A.S. t. 271 (1970) série A, pp. 149-152.

[4] J. BARANGER
Un théorème de caractérisation de certains sous-espaces hilbertiens de ℓ_1 .
A.F.C.E.T. Brèves communications R. 3 1970 pp. 131-134.

[5] J. BARANGER et M. DUC-JACQUET
Matrices tridiagonales symétriques et matrices factorisables.
R.I.R.O. n° R3 1971, p. 61-66.

[6] R.E. BARNHILL and J.A. WIXOM
Quadratudes with remainders of minimum norm. I.
Math. Comp. V. 21, 1967, pp. 66-75.

[7] R.E. BARNHILL
Optimal quadratures in $L^2(E_p)$. I.
S.I.A.M. J. Numer. Anal., Vol. 4, 1967, pp. 390-397.

[8] R.E. BARNHILL
Optimal quadratures in $L^2(E_p)$. II.
S.I.A.M. J. Numer. Anal.

[9] R.E. BARNHILL
Quadratures with remainders of minimum norms. II.
Math. of Comp., Vol. 21, n° 99, 1967.

[10] S. BERGMAN
The kernel function and conformal mapping.
Math. Surveys, n° 5, Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1950.

[11] C. CARASSO
Approximation non linéaire dans un espace vectoriel vormé.
Publication n° 35 de l'Université de Montréal
(Département d'Informatique) 1969.

[12] F. CATZ
Séminaire d'Analyse Numérique. Grenoble 1971-72.

[13] Y. CHERRUAULT
Approximation d'opérateurs linéaires et applications.
Dunod Paris 1968.

[14] Y. CHERRUAULT
Sur l'approximation des formes linéaires C.N.R.S.
nstitut Blaise Pascal. Juillet 1963.

[15] P.J. DAVIS
Errors of numerical approximation for analytic functions.
. . National Mech. Anal., Bol. 2, 1953, pp. 303-313.

[16] P.J. DAVIS
Interpolation and approximation.
Blaisdell, New-York, 1963.

[17] P.J. DAVIS and P. RABINOWITZ
Numerical integration.
Blaisdell, New-York, 1967.

[18] J. DIEUDONNE
Elements d'Analyse. Gauthier-Villars, Paris 1968.

[19] C.F. DUCATEAU
Etude de quelques problèmes d'interpolation.
Thèse. Grenoble 1971.

[20] P.L. DUREN
Theory of H^p spaces. Accademic Press New-York and London 1970.

[21] M. DUC-JACQUET
- Meilleures formules d'intégration dans certains espaces de Hilbert de fonctions. Note présentée par Mr. Jean LERAY C.R. Acad. Sc. Paris t. 271, p. 795-797 (19 octobre 1970).

- Sur l'approximation d'une fonctionnelle par des fonctionnelles qui dépendent d'un paramètre, dans des espaces de Hilbert. Note présentée par Mr. Jean LERAY C.R. Acad. Sc. Paris t. 272, p. 469-472 (15 février 1971).

- Séminaire d'Analyse Numérique. Grenoble 1971-72.

[22] U. ECKHARD
Einige Eigenschaften Wilfscher Quadratur-formeln.
Numeriche Mathematik 12, 1-7, 1968.

[23] N. GASTINEL
Communication. Colloque d'Analyse Numérique de Super-Besse 1971.

[24] M. GOLOMB and H.F. WEIMBERGER
Optimal approximation and errors bounds.
On numerical approximation.
Edit. by R.E. LANGER, Univer. of Wisconsin press, Madison, Wisc., 59.

[25] M. GOLOMB
Lectures on theory of approximation.
Argonne National Laboratory. Argonne, I11, 1962.

[26] A. KOUNADIS
Inversion de matrices tridiagonales symmétriques.
R.I.R.O. R3 1972 (Brèves communications).

[27] L.V. KANTOROVICH
Functional Analysis and applied mathematics.
1964. Pergamon Press.

[28] J. KUNTZMANN
Méthodes Numériques. Interpolation. Dérivées.
Dunod. Paris 1959.

[29] V.I. KRYLOV
Approximate calculation of integrals.
Mac Millan, New-York, 1966.

[30] F.M. LARKIN
Optimal approximation in Hilbert spaces with reproducing kernel functions. Math. Comp. vol. 24, n° 112 (octobre 1970).

[31] J.L. LIONS
Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles.
Séminaire Université de Montréal. Eté 1962.

[32] J. NEVEU
Processus aléatoires gaussiens.
Séminaire Université de Montréal. Eté 1968.

[33] S.M. NIKOLSKII
Quadratures formulas.
Moscou 1958, Traduit en anglais par Hindustan publ. corp. en 1964.

[34] P. RABINOWITZ and N. RICHTER
New error coefficients for estimating quadrature errors for analytic functions.
Math. Comp. 1970.

[35] A. SARD
Best approximate integration formulas ; Best approximation formulas. Amer. J. Math ; 71 ; 1949 ; pp. 80-91.

[36] A. SARD
Linear approximation.
Math. Surveys, 9, Amer. Math. Soc. 1963.

[37] L. SCHWARTZ
Functional Analysis.
New-York University (1964).

[38] L. SCHWARTZ
Sous espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés.
J. d'Analyse Math. Jérusalem (1964).

[39] H.S. SHAPIRO
Topics in approximation theory.
Springer-Verlag, Berlin Heidenberg, New-York 1971.

[40] S.L. SOBOLEV
Les équations aux dérivées partielles.
Colloques Internationaux du C.N.R.S. Paris (1962).

[41] R.A. VALENTIN
Applications of functional analysis to optimal numerical for analytic functions.
Thesis, Vrown University, 1965.

[42] H.S. WILF
Exactness conditions in numerical quadrature.
Num. Math. 6, pp. 315-319, 1964.